

Berechnung der
Kottwitz–Shelstad–Transferfaktoren für
unverzweigte Tori in nicht zusammenhängenden
reduktiven Gruppen

Inauguraldissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Universität Mannheim

vorgelegt von
Dipl.–Math. Joachim Ballmann
aus Frankfurt (Main)

Mannheim, 2001

Dekan: Professor Dr. Guido Moerkotte, Universität Mannheim

Referent: Professor Dr. Rainer Weissauer, Universität Heidelberg

Korreferent: Professor Dr. Siegfried Böcherer, Universität Mannheim

Tag der mündlichen Prüfung: 8. Mai 2001

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	v
1 Bezeichnungen und Bekanntes	1
2 Reduktive Gruppen mit Twists	7
Wurzelsysteme mit Twists	7
Vorbereitungen zum Satz von Steinberg	9
Der Satz von Steinberg	13
Satz von Steinberg mit zyklischer Automorphismengruppe	24
Der Kammerkomplex zu $P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I$	25
Folgerungen aus dem Satz von Steinberg	32
Gegenbeispiele	38
Lockerung der Bedingung an den Körper F	40
3 Tori	41
Maximale Tori in nicht zusammenhängenden reduktiven Gruppen	41
Definition von \mathfrak{G} , \mathfrak{D} , \mathfrak{E}	46
Topologische Jordanzerlegung	50
Langlandsdualität	52
χ -Data	53
4 Das Gebäude	57
Faktensammlung	59
Tits Gebäude mit Twists	61
Rationalitätsfragen für L	68
Stark kompakte Elemente in $\tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L$	71
Fixpunkte von anisotropen unverzweigten Tori	77
5 Die Transferfaktoren	81
Endoskopie und Matching von halbeinfachen Elementen	81
Eigenschaften von Matchings	84
Fundamentale Annahmen	86
Definition von Δ_I , Δ_{II} und Δ_{IV}	91
Definition von Δ_{III}	95

Normierung von Δ_{III}	100
Definition und Eigenschaften von Δ im quasisplit-Fall	106
Unverzweigte endoskopische Daten	107
6 Homogenität	111
Homogenität von Δ_{II} und Δ_{IV}	112
Homogenität von Δ_{III}	113
7 Reduktionen	119
Sataketransformation	119
Sataketransformation mit Twist	122
Abstieg auf die derivierte Gruppe	127
Präparationen für den Harish–Chandra–Abstieg	129
Harish–Chandra–Abstieg	133
8 Δ für unverzweigte anisotrope Tori	137
Beispiele	142
A Endoskopische Gruppen der unverzweigten einfachen Gruppen	145
Literaturverzeichnis	163
Index	167

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Fragen aus dem Umfeld der Arthur–Selbergschen Spurformel. Für eine Zusammenhangskomponente L einer reduktiven Gruppe \tilde{G} über einem globalen Körper F besteht sie nach [Ar88], grob gesagt, aus einer Identität von Distributionen

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{D}(G)} J_{\mathfrak{o}}(f) = \sum_{\chi \in \mathcal{X}(\tilde{G})} J_{\chi}(f) \quad \text{für } f \in \mathcal{C}_c^{\infty}(L(\mathbb{A})^1),$$

bei der auf der sogenannten geometrischen Seite (links) gewichtete Orbitalintegrale mit verallgemeinerten Spuren auf der rechten, spektralen Seite verglichen werden. Für viele Anwendungen, aber auch bei der Stabilisierung der Spurformel – oder auch Teilen der Spurformel, wie etwa der elliptischen Terme, deren Stabilisierung in [KS99] modulo des fundamentalen Lemmas gezeigt wird – vergleicht man die Spurformel für \tilde{G} mit denen zu ”kleineren” quasizerfallenden zusammenhängenden Gruppen H mit Zusatzstruktur (vergleiche (5.3)). Diese ”endoskopische” Gruppen hängen nach ihrer Definition [LS87, (1.2)] bzw. [KS99, (2.1)] ziemlich indirekt mit \tilde{G} zusammen, nämlich zweifach über einen Dualisierungsprozess: $H \rightsquigarrow {}^L H \hookrightarrow {}^L G \rightsquigarrow G$ (im einfachsten Fall). Man kann allerdings halbeinfache Elemente bzw. F –Tori direkt (und über F !) von H nach \tilde{G} einführen. (Deswegen hat Langlands diese Gruppen wohl endoskopisch genannt.)

Dadurch werden zu gewissen stark regulären Elementen $\gamma \in H_{ad}(F)$ Elemente $\delta \in L(F)$ assoziiert, die nach [KS99, Lemma 3.3.C] ebenfalls stark regulär sind im Sinne von Definition 3.2. Genauer besteht ein solches Matching $\gamma \leftrightarrow \delta \in L(F)$ allerdings zwischen den stabilen Konjugationsklassen von γ bzw. δ in H bzw. \tilde{G} . (Für stark reguläre Elemente $\delta \in \tilde{G}(F)$ ist die stabile Konjugationsklasse der Schnitt der $G(\bar{F})$ –Konjugationsklasse von δ mit $\tilde{G}(F)$, wobei ab nun immer $G := \tilde{G}^{\circ}$.)

Ausgehend von dem Begriff des Matchings zwischen Elementen von H und L , definieren [LS87, 1.4] bzw. [KS99, (5.5)] den Begriff eines Matchings von Funktionen. Ein Matching $f^H \leftrightarrow f$ zwischen zwei Funktionen $f^H \in \mathcal{C}_c^{\infty}(H(F))$ und $f \in \mathcal{C}_c^{\infty}(L(F))$ (mit gewissen Eigenschaften bezüglich zentraler Elemente bzw. Charaktere von $G(F)$...) liegt vor, wenn ihre Orbitalintegrale folgendermaßen ”aufeinandertreffen”/”zusammenpassen”:

$$O_{\gamma}^{H,st}(f^H) = \sum_{\delta \in L(F)/G(F)\text{--Konj.}} \Delta(\gamma, \delta) O_{\delta}^{L,\omega}(f),$$

wenn $\gamma \leftrightarrow \delta \in L(F)$ ein Matching stark regulärer halbeinfacher Elemente ist.

Die hierbei auftretenden Gewichtungsfaktoren $\Delta(\gamma, \delta)$ stehen im Mittelpunkt dieser Arbeit. Diese Transferfaktoren sind – wie auch Endoskopie und Matching – von Langlands und Shelstad (in [LS87]) bzw. Kottwitz und Shelstad in [KS99] sowohl für globale (Zahl–) Körper als auch für lokale Körper definiert worden. Der globale Transferfaktor ist dabei ein Produkt über die lokalen $\Delta(\gamma_{\nu}, \delta_{\nu})$.

Diese Arbeit beschränkt sich auf die lokalen Transferfaktoren, und zwar an fast allen Stellen eines Zahlkörpers: Fast immer ist F ein p –adischer Körper mit genügend

großer Restklassencharakteristik p und $\tilde{G} = \langle L \rangle$ eine reduktive Gruppe, die von einer über F definierten Zusammenhangskomponente L erzeugt wird. (Man nimmt an, daß $L(F) \neq 0$.) Die weiteren Annahmen über L , \tilde{G} , die endoskopische Gruppe H und ein $\mathbf{a} \in H^1(F, \text{Cent}(\hat{G}))$ sind im Paragraphen "Fundamentale Annahmen" in (5.17) zusammengestellt.

Sei zum Beispiel G einfach zusammenhängend, zerfallend über F und mit Wurzelsystem $\Phi(G)$ vom Typ D_7 , d.h. $G = \text{Spin}(2 \cdot 7)$. Sei Θ ein Automorphismus von G , der ein F -Splitting (das sind hier ein Splittorus \mathbb{T} in einer F -Borelgruppe \mathbb{B} und Wurzelvektoren für die einfachen (positiven) Wurzeln von $\Phi(G, \mathbb{B}, \mathbb{T})^+$) stabilisiert und so operiert, daß auf dem Dynkindiagramm, der nichttriviale Diagrammautomorphismus bewirkt wird, und $\tilde{G} := G \rtimes \langle \Theta \rangle$.

Dann ist die duale Gruppe $\hat{G} \times \text{Gal}(\bar{F}/F)$, wobei $\hat{G} = \text{PSO}_{2,7}(\mathbb{C}) = \{g \in \text{PGL}(14) \mid {}^t g J g = J\}$ (${}^t g$ ist das Transponierte zu g und $J = (-1^i \cdot \delta_{i,15-j})_{i,j}$) und der durch Θ definierte Automorphismus $\hat{\theta}$ von \hat{G} , der das übliche Splitting mit den oberen Dreiecksmatrizen stabilisiert, ist gegeben durch Konjugation mit dem Element der orthogonalen Gruppe, das auf dem Diagonaltorus $\mathcal{T} \subset \hat{G}$ operiert durch vertauschen der 7. und 8. Einträge: $\Theta(\text{Diag}(t_1, \dots, t_7, t_7^{-1}, \dots, t_1^{-1})) = \text{Diag}(t_1, \dots, t_6, t_7^{-1}, t_7, t_6^{-1}, \dots)$. Sei T ein anisotroper unverzweigter Θ -stabiler F -Torus, so daß durch die Identifikation $X^*(T) = \text{Hom}(T, \mathbb{G}_m) = \text{Hom}(\mathbb{G}_m, \mathcal{T}) = X_*(\mathcal{T})$ die auf \mathcal{T} übertragene Galoisaktion von dem Coxeterelement der Weylgruppe $W(\mathcal{T}, \hat{G})^{\hat{\theta}} = W(\mathcal{T}^{\hat{\theta}}, \hat{G}^{\hat{\theta}})$ erzeugt wird. Genauer soll (dabei) der Frobenius eines unverzweigten endlichen Zerfällungskörpers F'/F auf $t = \text{Diag}(t_1, \dots, t_7, t_7^{-1}, \dots, t_1^{-1})$ operieren durch $(162534) \circ i_{4,7} \circ \hat{\theta} = (162534)i_4$, wobei der Zykel die Permutation auf den Indizes angibt und i_x die Einträge, die invertiert werden. Sei $s := (-1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, \dots) \in \mathcal{T}$. Dann ist $\hat{H} = (\hat{G}^{s\hat{\theta}})^\circ$ vom Typ $B_3 \times B_3$ und das Duale einer F -zerfallenden Gruppe vom Typ $C_3 \times C_3$. Weil \hat{H} vom adjugierten Typ ist, ist die zugehörige endoskopische Gruppe $H = \text{Sp}(6) \times \text{Sp}(6)$.

Nach den Rechnungen im Anhang (Fall 2.1 auf Seite 160) ist dies eine endoskopische Gruppe, in der es einen F -Torus T_H gibt, für den $T_H \simeq T_\Theta := T/(1 - \Theta)T$ über F definiert ist. Das ermöglicht Matching zwischen $T_H(F) \ni \gamma \leftrightarrow \delta = t \cdot \Theta$, für $t \in T(F)$. Mit den Formeln aus Kapitel 8 kann man den (lokalen) Transferfaktor von Kottwitz und Shelstad berechnen zu

$$\Delta(\gamma, \delta) = \left(\frac{-1}{q^{6/2}} \right)^{\text{val}_F \left((t_1/t_4 - 1)(t_2/t_4 - 1)(t_3/t_4 - 1) \right)},$$

wenn $t = \delta \cdot \Theta^{-1} = \text{Diag}(t_1, \dots, t_7, t_7^{-1} \dots t_1^{-1}) \in T(F)$, q die Größe des Restklassenkörpers von F bezeichnet und val_F die Bewertung von F , für die $\text{val}_F(F^\times) = \mathbb{Z}$.

Es folgt eine kapitelweise Beschreibung der Arbeit.

Im zweiten Kapitel wird folgender Satz von Steinberg bewiesen und verallgemeinert:

Satz ([St68, 8.1]). *Sei G eine reduktive Gruppe und Θ ein halbeinfacher Automorphismus von G . Dann ist $(G^\Theta)^\circ$ eine reduktive Gruppe.*

Beim Beweis wird ausführlich die Struktur der Untergruppen $\text{Norm}(T, G)^\Theta$, T^Θ und U^Θ analysiert, die G^Θ nach der Bruhatzerlegung bestimmen.

In den hinteren Paragraphen von Kapitel 2 wird diese Information benutzt, um (unter anderem) den wichtigen Satz von Dynkin zu verallgemeinern, der eine Bijektion zwischen den Dynkintypen der maximalen reduktiven Untergruppen einer zusammenhängenden reduktiven Gruppe G und den maximalen Subgraphen des erweiterten Dynkindiagramms zu G ergibt. Man benutzt dazu geeignete Dynkin-diagramme für Gruppen mit Twists (vgl. S. 29), die sich aus der Geometrie des Alkovens (eines Fundamentalbereichs der Exponentialfunktion auf einen maximalen Torus) ergeben. Diese Diagramme sind dieselben, welche Tits (z.B. in [Ti79, 4.]) bei den Klassifikationen der einfach-algebraischen Gruppen (über p -adischen Körpern) benutzt.

Als weitere Anwendung werden in Behauptung 2.43 die Fundamentalgruppen der Gruppen $\text{Cent}(\delta, G) =: G^\delta$ berechnet, wenn G einfach zusammenhängend und einfach algebraisch ist.

Das dritte Kapitel vereinigt Einiges, was später benötigt wird. Gemeinsam ist fast allen diesen Themen, daß sie halbeinfache Elemente (in nicht notwendig zusammenhängend reduktiven Gruppen) behandeln.

Insbesondere wird der Begriff eines (maximalen) Torus verallgemeinert. Die Idee ist, maximale Tori als Bizentralisatoren $\text{Cent}(\text{Cent}(\delta, \tilde{G}), \tilde{G}) =: \tilde{T}$ von (fast) halbeinfachen Elementen aufzufassen. (Die üblichen Zentralisatoren $\text{Cent}(\delta, G)$ halbeinfacher Elemente sind nämlich zu klein, wenn $\text{int}\delta$ äußere Automorphismen von G bewirkt.) Wenn \tilde{G} nicht zusammenhängt, sind diese Tori nicht mehr zusammenhängend. Aber die (wichtigsten) Struktursätze maximaler Tori lassen sich verallgemeinern: Jedes fast halbeinfache Element von \tilde{G} liegt in einem Torus (3.3), je zwei Tori sind $G(\bar{F})$ -konjugiert (3.5), $\text{Norm}(\tilde{T}, \tilde{G})/\tilde{T}$ ist eine Coxetergruppe, usw.

Bei der Berechnung der Transferfaktoren spielt an wesentlicher Stelle – bei der Berechnung von Δ_I und der Normierung von Δ_{III} – die Wahl einer maximal kompakten (Θ -invarianten) Untergruppe von $G(F)$ eine entscheidende Rolle. Daher wird in Kapitel 4 die Theorie der Gebäude von Bruhat und Tits [BT72] und [BT84] referiert. Nach einem knappen Einstieg, der sich im wesentlichen auf Tits' Bericht in Corvallis [Ti79] stützt, werden einige Dinge für Gebäude von nicht zusammenhängenden (unverzweigten und halbeinfachen) Gruppen bewiesen, denn die Literatur zu diesem Thema scheint lückenhaft veröffentlicht.

Das ganze Kapitel zielt auf die Definition 4.45 und den letzten Satz 4.44. Er ist eine wesentliche Ingredienz im Satz 8.6, in dem gezeigt wird, daß es innerhalb der halbstabilen Konjugationsklasse eines anisotropen (unzusammenhängenden) unverzweigten F -Torus $\tilde{T} \subset \tilde{G}$ (vgl. Definition 3.17) immer eine maximal kompakte

Untergruppe $U \subset \tilde{T}'(F)$ gibt, deren Fixpunkt im Gebäude zu $G(F)$ eine hyperspezielle Ecke ist. Damit wählen in Kapitel 8 die maximal kompakten Untergruppen der anisotropen Tori die maximal kompakten Untergruppen von G .

Im Kapitel 5 beginnt die eigentliche Arbeit mit der Referenz der wichtigsten Konzepte aus [KS99]: Endoskopie, Matching halbeinfacher regulärer Elemente und die vier Transferfaktoren $\Delta_I, \dots, \Delta_{IV}$ aus denen *der* Transferfaktor Δ zusammengesetzt ist. Im Abschnitt "fundamentale Annahmen" wird angegeben, welche vereinfachte (lokale) Situation stets das Hauptinteresse ist. (Die Liste (5.17) auf Seite 86 ist zwar kurz, kann aber erst formuliert werden, wenn Endoskopie eingeführt wurde. Sie muß auf jeden Fall vor der Definition der Transferfaktoren stehen, da deren allgemeinste Definition viel zu aufwendig wäre.)

Neben Referenzen und einfachen Betrachtungen werden in diesem Kapitel drei wichtige Dinge unternommen. Zum einen werden die Faktoren Δ_I und Δ_{III} normiert. Bei $\Delta_I(\gamma, \delta)$ hat man das Problem, daß er von einer Wahl (eines F -Splittings von $G_{sc}^{\Theta^*}$) abhängt, die keiner der anderen Faktoren kompensiert (wie es bei den anderen Wahlen üblich ist). Diese Abhängigkeit sollte durch Wahl ausgezeichneter Splittings wegnormiert werden.

Der Faktor $\Delta_{III}(\gamma, \delta; \bar{\gamma}, \bar{\delta})$ hängt dagegen nach Definition in [KS99, (4.4)] "genuin" von zwei Matchings ab. Hier gilt es, das Referenzmatching $(\bar{\gamma}, \bar{\delta})$ möglichst kanonisch zu wählen.

Beide Probleme lassen sich (unter den Annahmen (5.17)) lösen, wenn man die Wahl eines hyperspeziellen (Θ^* -stabilen) Punktes x im Gebäude $\mathcal{B}(G, F)$ zu $G(F)$ in Kauf nimmt. Nach dieser Wahl werden in (5.27) Splittings und in 5.43 Referenzmatchings definiert, deren Wahl weder Δ_I^x noch Δ_{III}^x beeinflussen.

Das dritte Problem in Kapitel 5 betrifft die Gruppe \mathcal{H} im endoskopischen Datum (5.3). Sie vermittelt zwischen den L -Gruppen ${}^L H$ und ${}^L G$ und ist im allgemeinen selbst keine L -Gruppe (auch nicht für halbeinfache, einfach zusammenhängendes G), geschweige denn isomorph zu ${}^L H$. (Dieses Faktum verdoppelt die Definition von Δ_{III} in [KS99].)

Im letzten Paragraphen von Kapitel 5 wird gezeigt, daß unter den fundamentalen Annahmen (5.17) (natürlich ohne die Annahmen (6) und die zweite Annahme in (5)!) tatsächlich $\mathcal{H} \simeq {}^L H$ ist und die L -Einbettung ${}^L H \hookrightarrow {}^L G$ sogar über $\hat{H} \rtimes \text{Gal}(F'/F) \hookrightarrow \hat{G} \rtimes \text{Gal}(F'/F)$ mit einer endlichen, unverzweigten Erweiterung F'/F faktorisiert.

Das sechste Kapitel bringt die Verallgemeinerung des Homogenitätsresultats aus [Hal93] auf Transferfaktoren mit Twists. Dabei wird beschrieben, wie $\Delta(\gamma, \delta)$ wächst, wenn man den topologisch unipotenten Anteil der topologischen Jordanzerlegung von γ und δ (die ab nun beide in kompakten Gruppen liegen sollen) gegen 1 streben läßt. (Der topologisch unipotente Teil δ_u eines halbeinfachen Elements $\delta \in \tilde{G}$ ist charakterisiert als der Einseinheitenanteil von $\rho(\delta)$ bei einer (oder jeder) stetigen Darstellung ρ der Gruppe \tilde{G} in einer (genügend großen) $Gl_n(\bar{\mathbb{Q}}_p)$. Der Restanteil $\delta_s = \delta\delta_u^{-1}$ ist das, was man bei der Reduktion mod p als halbeinfachen Teil noch

sieht. Deswegen wird δ_s in 3.29 der residuell halbeinfache Teil genannt werden.) Man geht folgendermaßen vor: Man potenziert γ und δ mit einer geeigneten p -Potenz Q , so daß die residuell halbeinfachen Anteile $\gamma_s = \gamma_s^Q, \delta_s = \delta_s^Q$ nicht verändert werden, aber die topologisch unipotenten Teile γ_u^Q, δ_u^Q gegen 1 gehen. Dann erhält man als quantitative Aussage über das Wachstum (in Satz 6.4 bzw. 6.5)

$$\Delta(\gamma^Q, \delta^Q) = \Delta(\gamma, \delta) \cdot |Q|_F^{\frac{|M|}{2}},$$

wobei $M \subset \Phi(G)_{\Theta^*}$ eine gewisse Teilmenge von Wurzeln ist. Ihre Größe hängt ungefähr davon ab, wie stark das Wurzelsystem $\Phi(H)$ der endoskopischen Gruppe von dem der Fixgruppe $\Phi(G^{\Theta})$ abweicht und auf welchen dieser Wurzeln δ nur bis auf topologisch unipotente Faktoren nur aus einem Vertreter θ^* für die gesternte Aktion von L (vgl. (1.8)) besteht.

Der Wachstumsfaktor $|Q|^{|M|/2}$ kommt vom Faktor Δ_{IV} her, der $|\cdot|_F$ -Betrag eines Quotients zweier Harish–Chandra–Diskriminanten ist.

Die Schwierigkeiten liegen wieder beim Faktor Δ_{III} : Man hat zu zeigen, daß er nur vom residuell halbeinfachen Anteil der topologischen Jordanzerlegung bestimmt wird, d.h.

$$\Delta_{\text{III}}(\gamma, \delta) = \Delta_{\text{III}}(\gamma_s, \delta_s).$$

Das ist Satz 6.9.

Kapitel 7 beschäftigt sich mit dem Abstieg. Zum einen möchte man auf halbeinfache Gruppen absteigen, zum anderen auf Θ -stabile Levifaktoren von \tilde{G} . Nach diesen Reduktionen darf man sich für den Rest der Arbeit auf halbeinfache Gruppen beschränken, in denen \tilde{T} anisotrop ist. Das funktioniert routinemäßig, wenn man die Sataketransformation ein wenig modifiziert bzw. verallgemeinert.

Für unverzweigte halbeinfache Gruppen \tilde{G} und stark kompakte, stark reguläre δ , für die der zugehörige Torus $\tilde{T} = \text{Cent}(\tilde{G}^{\delta}, \tilde{G})$ unverzweigt und anisotrop ist, wird der Transferfaktor Δ in Kapitel 8 berechnet. Hierzu wird in Definition 8.7 eine Diskriminante $\Delta^U(\delta)$ verallgemeinert, die Weissauer in [W] für zusammenhängende Gruppen definiert hat. Sie ist eine rationale Funktion in p (bzw. der Restklassengröße $q = |\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}_F|$) und wird gebildet zu einer maximal kompakten Untergruppe U von $\tilde{T}(F)$. Das Hauptresultat Satz 8.10 ist dann, daß

$$\Delta(\gamma, \delta) = \frac{\Delta^U(\delta)}{\Delta^{T_H(F)}(\gamma)}$$

für alle $\gamma \in T_H(\bar{F})$, die einen vorgegebenen 1-Kozykel $z_H^*(\sigma) \in Z^1(F, \text{Cent}(H))$ beranden. In Abhängigkeit von γ ist $\delta = \delta(\gamma) \in \tilde{G}(F)$ (nach 8.2) stark regulär und kompakt wählbar, so daß $\gamma \leftrightarrow \delta$ ein Matching ist (vgl. Definition 5.9)).

Im Appendix werden alle endoskopischen Gruppen zu den einfachen, unverzweigten Gruppen \tilde{G} angegeben, die ein Matching ermöglichen, an dem ein primitiver anisotroper Torus beteiligt ist. "Primitiv" wurde in [BFW] definiert und bedeutet im

wesentlichen, daß solche Tori in keine reduktive Untergruppe von \tilde{G} "absteigen". (Vgl. Behauptung A.5.)

Ich bedanke mich bei Professor Weissauer für viele und wesentliche Anregungen und seine Unterstützung, bei Dr. Uwe Weselmann für Korrekturen und zahllose Gespräche über meine Arbeit und den Mitarbeitern des Lehrstuhls Mathematik III, von denen allen ich profitiert habe.

1 Bezeichnungen und Bekanntes

(1.1) In dieser Arbeit sei F (außer in Kapitel 2 und (5.18)) ein lokaler Körper der Charakteristik 0 mit Restklassencharakteristik p , d.h. ein p -adischer Körper, \bar{F} ein algebraischer Abschluss und val_F seine Bewertung, so normiert, daß $\text{val}_F(F^\times) = \mathbb{Z}$.

Der Betrag $|\cdot|_F$ auf \bar{F} sei die Fortsetzung von $|\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}|^{-\text{val}_F(\cdot)}$ auf \bar{F} . Die Primzahl p sei groß genug fixiert. Das wird später in (5.17) präzisiert.

Die Weilgruppe nach [Ta79]: Zur absoluten Weilgruppe W_F von F gehören stets die folgenden Homomorphismen φ und r_E . Für den p -adischen Körper F hat man $\varphi : W_F \hookrightarrow \text{Gal}(\bar{F}/F)$ mit folgendem Bild: Sei $\kappa(E)$ der Restklassenkörper einer endlichen Körpererweiterung $E \subset \bar{F}$ von F und $\bar{\kappa} = \bigcup_E \kappa(E)$. Dann ist $\varphi(W_F)$ die Untergruppe aller $\sigma \in \text{Gal}(\bar{F}/F)$, die auf $\bar{\kappa}$ die Abbildung $x \mapsto x^{|\kappa(F)|^n}$ induzieren für ein geeignetes $n \in \mathbb{Z}$.

In diesem Abschnitt sei E/F immer endlich. Sei $W_E := \varphi^{-1}(\text{Gal}(\bar{F}/E))$ und $W_{E/F} := W_F / \overline{[W_E, W_E]}$ die relative Weilgruppe. Man hat $W_F \simeq \varprojlim W_{E/F}$ als topologische Gruppen, wobei der projektive Limes über alle (endlichen Erweiterungen) E/F geführt wird.

Die anderen Homomorphismen $r_E : E^\times \xrightarrow{\sim} (W_E)^{ab} := W_E / \overline{[W_E, W_E]}$, die unabdingbar zu W_F gehören, sind so, daß

$$r_E : E^\times \xrightarrow{\sim r_E} (W_E)^{ab} \xrightarrow[\text{von } \varphi]{\text{induziert}} \text{Gal}(\bar{F}/E)^{ab}$$

die Reziprozitätsabbildung der Klassenkörpertheorie ist. Frei benutzt werden die (weiteren) wohlbekannten funktoriellen Eigenschaften [Ta79, (W_2)] ("Konjugation"), [Ta79, (W_3)] ("Inklusion versus Verlagerung"), [Ta79, (1.2.2)] ("Norm versus Inklusion") und für Galoiserweiterungen E/F die exakte Sequenz

$$(i) \quad 1 \longrightarrow E^\times \longrightarrow W_{E/F} \longrightarrow \text{Gal}(E/F) \longrightarrow 1,$$

bei der rechts r_E benützt wurde und links φ . (Die Extensionsklasse von $W_{E/F}$ ist dabei die fundamentale (kanonische) Klasse $\alpha_{E/F} \in H^2(\text{Gal}(E/F), E^\times)$ der Klassenkörpertheorie.)

(1.2) Sei A eine Menge, auf der eine Gruppe G operiert, $x \in A$, $B \subset G$ und H eine Untergruppe von G . Folgende Bezeichnungen werden (ständig) benützt:

$$\begin{aligned} \text{Stab}_A(G) &:= \{g \in G \mid \forall a \in A : g \cdot a \in A\} =: \text{Stab}(A, G) \\ \text{Fix}_A(G) &:= \{g \in G \mid \forall a \in A : g \cdot a = a\} =: \text{Fix}(A, G) \\ G_x &:= \text{Stab}_{\{x\}}(G) = \text{Fix}_{\{x\}}(G) \\ \text{Norm}(H, G) &:= \{g \in G \mid gHg^{-1} \subset H\} \\ \text{Cent}(B, G) &:= \{g \in G \mid \forall b \in B : gb = bg\} \quad \text{Cent}(G) := \text{Cent}(G, G) \end{aligned}$$

(1.3) Sphärische Wurzelsysteme werden nur im Zusammenhang mit reductiven Gruppen benutzt werden: Sei G eine zusammenhängende reductive Gruppe über F und T ein maximaler Torus von G . Das Wurzelsystem von G (bezüglich der T -Aktion auf $\text{Lie}(G)$) wird mit $\Phi = \Phi(G, T) \subset X^*(T) := \text{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ bezeichnet, die Kowurzeln mit $\Phi^\vee = \Phi^\vee(G, T) \subset X_*(T) := \text{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$. Sei $V = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ und dual dazu $V^* = X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Ferner sei $\mathbb{Z}[\Phi]^* = \{v \in V \mid \alpha(v) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } \alpha \in \Phi\}$ das zu $\mathbb{Z}[\Phi]$ duale Gitter in V . Die Weylgruppe $W = W(\Phi)$ ist die von allen Spiegelungen $s_\alpha : x \mapsto x - \langle \alpha, x \rangle \alpha^\vee$ an den Hyperebenen $\text{Kern } \alpha$ für alle $\alpha \in \Phi$ erzeugte Gruppe. In der Situation oben hat man $W(\Phi) = \text{Norm}(T, G)/T = W(T)$. Nach Wahl einer Basis Δ (oder gleichbedeutend eines Positivbereichs Φ^+ bzw. einer Borelgruppe B) bezeichne α^+ die Wurzel maximaler Höhe. Das Wurzeldatum von G $\Psi(G, T) = (X^*(T), \Phi, X_*(T), \Phi^\vee)$ legt die Isomorphieklasse von G über \bar{F} eindeutig fest. Nützlich ist:

$$\begin{aligned} \Psi(G_{\text{der}}) &= (X^*(T)/(X^*(T) \cap V_{\text{der}}^\perp), \Phi, X_*(T) \cap V_{\text{der}}, \Phi^\vee) \\ \Psi(\text{Cent}(G)^\circ) &= (X^*(T)/(X^*(T) \cap V_{\text{der}}^*), \emptyset, X_*(T) \cap (V_{\text{der}}^*)^\perp, \emptyset), \end{aligned}$$

wobei $V_{\text{der}} := \mathbb{Z}[\Phi^\vee] \otimes \mathbb{R}$ und $V_{\text{der}}^* := \mathbb{Z}[\Phi] \otimes \mathbb{R}$.

Ein Wurzelsystem Φ heißt reduziert, wenn aus $\alpha \in \Phi$ und $k \cdot \alpha \in \Phi$ stets $k \in \{\pm 1\}$ folgt. Wenn Φ nicht reduziert ist, sei $\Phi^{\text{lang}} = \{\alpha \in \Phi \mid 2\alpha \notin \Phi\}$ und $\Phi^{\text{kurz}} = \{\alpha \in \Phi \mid \frac{1}{2}\alpha \notin \Phi\}$. Beide sind reduzierte Wurzelsysteme und $\Phi = \Phi^{\text{lang}} \cup \Phi^{\text{kurz}}$. Die Wurzeln aus $\Phi^{\text{lang}} \cap \Phi^{\text{kurz}}$ werden manchmal reduziert genannt.

(1.4) Affine Wurzelsysteme kommen (mehrmals variiert) in folgender Form vor: Sei W wie oben eine sphärische Weylgruppe und $X_* \subset V$ ein W -stabiles Gitter. Dann ist $X_* \rtimes W$ eine affine Weylgruppe, indem $x \in X_*$ als Translation (um x) auf V operiert.

Affine Weylgruppen, die Spiegelungsgruppen (Coxetergruppen) sind, stehen (nach [St68, 3.5+6]) in Korrespondenz zu affinen Wurzelsystemen. Das sind Wurzelsysteme der Form $\Phi_{\text{aff}} = \{(\alpha, k) \in \Phi \mid \alpha \in \Phi, k \in \mathbb{Z}\}$, wobei man üblicherweise $(\alpha, k) = \alpha + k$ als inhomogene lineare Funktion auf V schreibt. Dann sind die Wände $H_{\alpha, k} = \{x \in V \mid \alpha(x) + k = 0\}$ für alle $\alpha + k \in \Phi_{\text{aff}}$ die Spiegelungshyperebenen und $X_* = \mathbb{Z}[\Phi^\vee]$.

(1.5) Kammerkomplexe werden benutzt, weil sie sich eignen, die kombinatorischen Aspekte von affinen Weylgruppen zu beschreiben.

Ein Kammerkomplex der (kombinatorischen) Dimension n in einem affinen Raum V besteht aus einer Teilmenge ("Ecken") $E \subset V$ und einer Menge \mathcal{F} ("Facetten") von endlichen Teilmengen von E . \mathcal{F} ist partiell geordnet bezüglich der Inklusion und $(E, \mathcal{F}, \subset)$ erfüllt folgende Eigenschaften:

- (1) $x \in E \Rightarrow \{x\} \in \mathcal{F}$. Außerdem ist $\emptyset \neq \mathcal{F}$.
- (2) $F \in \mathcal{F}$ und $\emptyset \neq F' \subset F \Rightarrow F' \in \mathcal{F}$.
- (3) Jede Facette ist in einer maximalen Facette enthalten. Diese maximalen Facetten heißen Kammern und ihre Kardinalität ist n .

- (4) Je zwei Kammern $C, C' \in \mathcal{F}$ lassen sich über eine "Galerie" verbinden, das ist eine Folge $(C_i)_i$ sukzessiv benachbarter Kammern $C \sim C_1 \sim C_2 \sim \dots \sim C_m \sim C'$

Dabei heißen zwei Kammern C, C' benachbart ($C \sim C'$), wenn sie eine gemeinsame "Kammerwand" W haben, d.h. eine Facette W mit $|W| = n - 1 = |C| - 1$.

Eine Abbildung von Kammerkomplexen respektiert diese Strukturen: Sie bildet Facetten auf Facetten ab und erhält die Incidenzrelation. Allerdings wird nicht gefordert, daß Ecken auf Ecken abgebildet werden.

Anmerkung: "Ecken" sind hier als kleinste Einheit eines kombinatorischen Systems gemeint. In nachfolgenden Beispiel können dies aber ganze translierte Unterräume von V sein. Man spricht dann besser von Facetten niedrigster Dimension.

Beispiel: Ein Wurzelsystem $\Phi \subset V^*$ definiert folgenden Kammerkomplex auf V : Wie in (1.4) angegeben, bildet man Φ_{aff} und die "Wände" $H_{\alpha,k}$. Die Zusammenhangskomponenten von $V \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi, k \in \mathbb{Z}} H_{\alpha,k}$ seien die Kammern. Die Facetten werden induktiv definiert: Eine Facette F der Dimension $m > 2$ ist Teilmenge von V der Form $F = (\overline{F_1} \cap \overline{F_2})^\circ$, so daß einerseits F_1, F_2 Facetten der Dimension $m + 1$ sind und andererseits F eine offene Teilmenge eines (geeigneten) affinen m -dimensionalen Unterrums enthält. Facetten der Dimension 1 sind von der Form $\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \neq \emptyset$ für zwei eindimensionale F_1, F_2 . Das sind notwendig Ecken.

Alle Kammerkomplexe K , die in dieser Arbeit bewußt als Kammerkomplexe angesehen werden, sind Quotienten $\coprod_{i \in I} K_i \twoheadrightarrow K$ von disjunkten Vereinigungen von Kammerkomplexen, die zu Wurzelsystemen $\Phi_i \in V_i^*$ gebildet werden, wie im Beispiel angegeben.

Satz 1.6 (Chevalley-Steinberg). *Sei $v \in V$ und $W_{aff} = \mathbb{Z}[\Phi^\vee] \rtimes W$ eine affine Weylgruppe, die als Spiegelungsgruppe auf V operiert, wie in (1.4) angegeben. Dann ist der Fixator $W_H := (\mathbb{Z}[\Phi^\vee] \rtimes W)_v$ von v eine Spiegelungsgruppe, erzeugt von den Spiegelungen aus W_{aff} , die v festlassen.*

Sei C eine Kammer, so daß $v \in \overline{C}$. Ihre Wände seien in Hyperebenen H_{α_i, k_i} ($1 \leq i \leq r$) enthalten. Dann ist $\{\alpha_i \mid v \in H_{\alpha_i, k_i}\}$ eine Basis eines Wurzelsystems Φ_H , dessen Weilgruppe isomorph zu W_H ist.

Beweis: [St68, 1.19]

□

(1.7) Automorphismen und Splittings: Sei G eine zusammenhängende reduktive Gruppe über F . Ein Paar (B, T) von G besteht aus einer Borelgruppe B und einem Torus $T \subset B$. Ein Splitting (von G) ist ein Tripel $\mathbf{spl}_G = (B, T, \{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta(B, T)})$, wobei (B, T) ein Paar ist und die X_α Wurzelvektoren (d.h. nichttriviale Vektoren aus den Gewichtsräumen \mathfrak{g}_α zu den $\alpha \in \Delta$ bei der Operation von T auf der Liealgebra von G). Die Automorphismengruppe von G wird mit $\text{Aut}(G)$ bezeichnet, die inneren Automorphismen mit $\text{Inn}(G)$, die äußeren mit $\text{Out}(G) := \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$ und $\text{Aut}(G, B)$ oder $\text{Aut}(G, \mathbf{spl}_G)$ sind die Gruppen der Automorphismen, die B

bzw. \mathbf{spl}_G stabilisieren. Die Wahl eines Splittings ermöglicht einen (eindeutigen) Schnitt der exakten Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathrm{Inn}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Out}(G) \longrightarrow 1.$$

(1.8) Die gesternte Aktion: Nach Wahl eines Splitting \mathbf{spl}_G kann man jedem $\theta \in \mathrm{Aut}(G, B, T)$ ein $\theta^* \in \mathrm{Aut}(G, \mathbf{spl}_G)$ zuordnen, so daß θ und θ^* in $\mathrm{Out}(G)$ dasselbe Bild haben. Dieses θ^* wird die gesternte Aktion von θ bzgl. des Splittings \mathbf{spl}_G genannt werden.

(1.9) Unverzweigt: In dieser Arbeit werden die verschiedensten Dinge unverzweigt sein. Reduktive Gruppen über F werden unverzweigt genannt, wenn sie quasisplit sind und über einer unverzweigten Erweiterung von F zerfallen. Endlich-dimensionale (stetige) Darstellungen einer topologischen Gruppe H werden unverzweigt bezüglich einer maximalen kompakten Untergruppe K genannt, wenn sie K -fixierte Vektoren besitzen. Insbesondere sind (eindimensionale) unverzweigte Charaktere trivial auf K . Unverzweigte 1-Kozykeln oder Kohomologieklassen in $H^1(W_{E/F}, H)$ (immer stetige Kohomologie!) sind auf den Einheiten $\mathcal{O}_E^\times \subset E^\times \subset W_{E/F}$ trivial. Unter der Langlands-korrespondenz $\mathrm{Hom}_c(T(F), \mathbb{C}^\times) \simeq H_c^1(W_F, \hat{T})$ korrespondieren unverzweigte Homomorphismen eines Torus T zu unverzweigten Kohomologieklassen. (Vgl. (3.37).)

(1.10) L -Gruppen: Sei G eine reduktive, quasizerfallende F -Gruppe, (B, T) ein über F definiertes Paar und $\Psi = \Psi(G, B, T) = (X^*(T), \Delta(B), X_*(T), \Delta^\vee(B))$ ein "based" Wurzeldatum. Dann ist die L -Gruppe zu G gegeben durch das Tripel $(\hat{G}, \rho_G, \eta_G)$. Dabei ist

- \hat{G} die zu G duale Gruppe, d.h. eine komplexe Gruppe mit dem dualen Wurzeldatum $\Psi^\vee = (X_*(T), \Delta^\vee(B), X^*(T), \Delta(B))$.
- $\rho_G : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow \mathrm{Aut}(\hat{G})$ eine L -Aktion, d.h. eine Aktion, deren Bild bereits in $\mathrm{Aut}(\hat{G}, \mathcal{B}, \mathcal{T})$ liegt für ein geeignetes Paar $(\mathcal{B}, \mathcal{T})$ in \hat{G} .
- $\eta : \Psi(G)^\vee \rightarrow \Psi(\hat{G})$ eine Bijektion, die die Galoisaktion auf $\Psi(G)^\vee$ mit der von der L -Aktion induzierten Aktion auf $\Psi(\hat{G})$ vertauscht, d.h. die Bijektion ist $\Gamma := \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ -äquivariant.

Notiert werden L -Gruppen aber kürzer als semidirekte Produkte ${}^L G := \hat{G} \rtimes W_F$, wobei W_F die (absolute) Weilgruppe von \bar{F}/F ist und die Aktion von W_F gegeben ist durch $W_F \xrightarrow{\mathrm{Proj}} \Gamma \xrightarrow{\rho_G} \mathrm{Aut}(\hat{G})$. Für nicht quasisplite Gruppen G wird die L -Gruppe zu einer quasispliten inneren Form gebildet. Man zeigt (z.B in [Bo79]), daß ${}^L G$ bis auf Isomorphie nicht von dieser inneren Form abhängt und ebensowenig von der Wahl von (B, T) . Ein L -Homomorphismus ist ein Homomorphismus zwischen zwei semidirekten Produkten $G_1 \rtimes W_F \rightarrow G_2 \rtimes W_F$, der auf der zweiten Komponente die Identität ist.

(1.11) Borovois Fundamentalgruppe ([Boro98], [Mil92, Appendix B]): Sei G reduktiv und ρ das Kompositum $G_{sc} \twoheadrightarrow G_{der} \hookrightarrow G$. Ferner sei T ein maximaler Torus in G , definiert über F , und T_{sc} sein Urbild unter ρ . Dann ist

$$\begin{aligned}\pi_0(G) &:= G/G^\circ \\ \pi_1(G) &:= X_*(T)/\rho_*(X_*(T_{sc})) = X_*(T)/\mathbb{Z}[\Phi(G, T)^\vee].\end{aligned}$$

Man kann nachweisen, daß π_1 bis auf kanonischen Isomorphismus nicht von der Wahl von T abhängt. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(G)$ hat folgende Eigenschaften:

- (a) π_1 ist ein exakter Funktor von der Kategorie der reduktiven Gruppen über F in die Kategorie der $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ -Moduln.
- (b) Ein innerer Twist $G \rightarrow G'$ induziert einen Isomorphismus $\pi_1(G) \rightarrow \pi_1(G')$.
- (c) $\pi_1(G) \simeq X^*(\text{Cent}(\hat{G}))$ (kanonisch!)
- (d) Falls G halbeinfach ist, gilt $(\pi_1(G))' = (\text{Kern}(\rho))^D$, wobei $(\cdot)' = \text{Hom}(\cdot, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ das Pontryagin dual und $(\cdot)^D$ das Cartierdual bezeichne.
- (e) Für einen Torus T gilt $\pi_1(T) = X_*(T)$.

(1.12) a -Data werden nur zu Wurzelsystemen Φ mit Galoisaktion benutzt werden. Ein a -Datum ist dann eine Menge $\{a_\alpha \in \bar{F}^\times \mid \alpha \in \Phi\}$, so daß

$$a_{-\alpha} = -a_\alpha \quad \text{und} \quad a_{\sigma\alpha} = \sigma a_\alpha \quad \text{für alle } \alpha \in \Phi \text{ und } \sigma \in \Gamma = \text{Gal}(\bar{F}/F).$$

Solche a -Data existieren: Für einen Orbit $\Gamma \cdot \alpha$ gilt entweder $\Gamma\alpha = -\Gamma\alpha$ (symmetrischer Orbit) oder $-\Gamma\alpha \cap \Gamma\alpha = \emptyset$ (asymmetrischer Orbit).

Nach Vorschrift oben kann man für einen asymmetrischen Orbit ein beliebiges $a_\alpha \in \bar{F}^\times$ wählen. Die restlichen a_λ aus $\Gamma(-\alpha) \cup \Gamma\alpha$ sind durch die Vorschriften dadurch festgelegt.

Für jeden symmetrischen Orbit $\Gamma\alpha$ ist die Vorschrift gleichbedeutend zur Wahl eines (beliebigen) $a_\alpha \in \text{Kern Spur}_{F_+/F_\pm} \cap \bar{F}^\times$, wobei F_+/F_\pm die quadratische Erweiterung des Fixkörpers F_\pm zu $\text{Stab}_{\{\pm\alpha\}}(\Gamma)$ mit dem Fixkörper F_+ zu $\text{Stab}_\alpha(\Gamma)$ ist. Wegen $H^1(F_+/F_\pm, F_+) = 0$ ist in diesem Fall stets $a_\alpha = x - \tau(x)$ für ein $x \in F_+ \setminus F_\pm$ und $\langle \tau \rangle = \text{Gal}(F_+/F_\pm)$. Wenn F_+/F_\pm unverzweigt ist, kann man daher a -Data aus den Einheiten $\mathcal{O}_{F_\pm}^\times$ oder dem Teichmüllerschen Restsystem μ_{F_\pm} von F_\pm wählen.

(1.13) z -Extensionen ([L79, S. 720ff], [K82, §1]): Eine Surjektion $\alpha : G_1 \twoheadrightarrow G$ von zusammenhängenden reduktiven F -Gruppen heißt z -Extension, wenn $(G_1)_{der}$ einfach zusammenhängend ist und $\text{Kern}\alpha \subset \text{Cent}(G_1)$ ein direktes Produkt von (zentralen) Tori $\text{Res}_{E_i/F}(\mathbb{G}_m)$ ist (für geeignete endliche Erweiterungen E_i/F). Insbesondere folgt mit Shapiros Lemma und Hilbert 90, daß $H^1(E, \text{Kern}\alpha) = 1$ für alle Teilkörper $E \subset \bar{F}$.

Langlands hat (in der zitierten Arbeit) die Existenz von z -Extensionen (für alle reduktiven G) gezeigt.

2 Reduktive Gruppen mit Twists

(2.1) Sei G eine zusammenhängende reduktive Gruppe, definiert und zerfallend über einem Körper $F \in \mathbb{C}$. Sei (B, T) ein Paar für G , d.h. B eine Borelgruppe von G und T der maximale Torus in B . Sei I eine Untergruppe von $\text{Aut}(G, B, T)$. Auf der Liealgebra $\text{Lie}(G)$ operiert I durch $\sigma(X) = d\sigma X$. Weil sich die Automorphismen von I eindeutig zu Automorphismen von G_{sc} liften lassen, werden diese von der Notation nicht unterschieden.

(2.2) In diesem ganzen Kapitel sei ein Splitting $\mathbf{spl}_G \supset (B, T)$ fixiert und die gesternte Aktion $\sigma^* \in \text{Aut}(G, \mathbf{spl}_G)$ eines $\sigma \in \text{Aut}(G)$ wird immer bzgl. \mathbf{spl}_G gebildet. Sei $I^* = \{\sigma^* \mid \sigma \in I\}$. Weil $\sigma \in I$ und σ^* auf T dieselbe Operation bewirken, operieren sie auch gleich auf $X_*(T)$, $\Phi(G, T)^\vee$, $X^*(T)$, $\Phi(G, B)^+$ (durch $\sigma(\alpha) := \alpha \circ \sigma^{*-1}$) und $W = N(T)/T$. Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, wird $\text{Norm}(T, G) = N(T)$ abgekürzt.

Sei $I\alpha$ der I -Orbit von α in Φ und $I_\alpha = \{\sigma \in I \mid \sigma(\alpha) = \alpha\}$ der Stabilisator von α .

Wurzelsysteme mit Twists

Definition 2.3. Sei $P_I(x) = \frac{1}{|I|} \sum_{\sigma \in I} \sigma$ die Projektion von V auf V^I (bzw. von V^* auf V^{*I}). Weil $P_I(\Phi)$ ein (nicht notwendig reduziertes) Wurzelsystem ist, lassen sich die Wurzeln aus Φ in drei Typen unterteilen: $\alpha \in \Phi$ ist vom

Typ I, wenn $\frac{1}{2} \cdot P_I(\alpha) \notin P_I(\Phi) \not\equiv 2 \cdot P_I(\alpha)$ (" $P_I(\alpha)$ ist reduziert").

Typ II, wenn $2 \cdot P_I(\alpha) \in P_I(\Phi)$ (" $P_I(\alpha)$ ist nicht reduziert und kurz").

Typ III, wenn $\frac{1}{2} \cdot P_I(\alpha) \in P_I(\Phi)$ (" $P_I(\alpha)$ ist nicht reduziert und lang").

Für Wurzelvektoren $x \in \Phi$ oder $x \in \Phi^\vee$ sei $S_{I,x} := \sum_{\gamma \in I \cdot x} \gamma$ die Summe über den I -Orbit von x (gebildet in V^* bzw. V).

Folgende Funktion auf Φ (bzw. Φ^\vee) wird sehr nützlich: Sei $c(\alpha) = 2$, falls α vom Typ II ist, und $c(\alpha) = 1$ sonst. Klarerweise ist c eine Funktion auf den I -Orbiten von Φ .

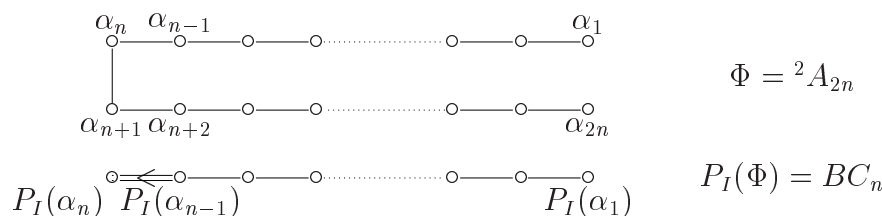
Beispiel 2.4. Der Ausnahmefall ${}^2A_{2n}$:

Sei $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq 2n+1}$ die Standardbasis von \mathbb{C}^{2n+1} und V die zu $(1, \dots, 1)$ orthogonale Hyperebene. Der Automorphismus θ bilde ε_i auf $-\varepsilon_{2n+2-i}$ ab. Die positiven Wurzeln sind $\Phi^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq 2n+1\}$, ihre Basis Δ bilden die $\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ ($i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$). Die Wurzeln vom Typ I haben die Gestalt $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, wobei $i \neq n+1 \neq j$ und $i+j \neq 2n+2$. Eine Wurzel vom Typ III hat die Gestalt $\varepsilon_i - \varepsilon_{2n+2-i}$. Die zu dieser Wurzel gehörenden Wurzeln vom Typ II sind das Paar $\varepsilon_i - \varepsilon_{n+1}$ und

$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{2n+2-i}$. Man hat z.B.

Typ α	I $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \alpha_1$	II $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} = \alpha_n$	III $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+2} = \alpha_n + \alpha_{n+1}$
$P_I(\alpha)$	$\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_{2n+1})$	$\frac{1}{2}(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+2})$	$\varepsilon_n - \varepsilon_{n+2}$
$S_{I\alpha}$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_{2n+1}$	$\varepsilon_n - \varepsilon_{n+2}$	$\varepsilon_n - \varepsilon_{n+2}$
$(P_I(\alpha^\vee))^\vee$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_{2n+1}$	$2(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+2})$	$\varepsilon_n - \varepsilon_{n+2}$
$(S_{I\alpha^\vee})^\vee$	$\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_{2n+1})$	$\varepsilon_n - \varepsilon_{n+2}$	$\varepsilon_n - \varepsilon_{n+2}$

Im folgenden Dynkindiagramm der A_{2n} werden die Wurzeln eines θ -Orbits übereinander dargestellt. Darunter ist das Dynkindiagramm, das unter der Projektion P_I entsteht. Es ist vom Typ BC_n , denn die "kurze" Wurzel $P_I(\alpha_n)$ ist "nicht reduziert", da $2P_I(\alpha_n) \in P_I(\Phi)$. Man beachte, daß die Verbindungskanten in beiden Diagrammen mit dem (θ -invarianten Standard-) Skalarprodukt auf V berechnet werden können.



(2.5) Eigenschaften von Wurzelsystemen mit Twists:

Als irreduzible Wurzelsysteme mit $I \neq \{id\}$ hat man 3 Serien ${}^2A_{2n}$, ${}^2A_{2n-1}$, 2D_n und 3 exzeptionelle Fälle 3D_4 , 6D_4 , 2E_6 zu betrachten. Indem man alle Fälle durchrechnet, erhält man folgende nützliche Fakten:

- (1)
$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} |I|\Phi & {}^2A_{2n-1} & {}^2A_{2n} & {}^2D_n & {}^3D_4 & {}^6D_4 & {}^2E_6 \\ \hline P_I(\Phi) & C_n & BC_n & B_{n-1} & G_2 & G_2 & F_4 \end{array}$$
- (2) Es gibt jeweils genau zwei Orbitlängen und zwar 1 und 2 (falls $|I| = 2$) bzw. 3 (in den Fällen 3D_4 , 6D_4). Die langen Wurzeln in $P_I(\Phi)$ sind genau die Projektionen der Fixwurzeln.
- (3) Die Zuordnung $\Delta \mapsto P_I(\Delta)$ gibt eine Bijektion zwischen den I -stabilen Basen von Φ und den Basen von $P_I(\Phi)$. Zudem ist $S_I(\Delta) := \{S_{I\alpha} \mid \alpha \in \Delta\}$ eine \mathbb{Z} -Basis von $\mathbb{Z}[\Phi]^I$.
- (4) Nur in Wurzelsystemen vom Typ ${}^2A_{2n}$ kommen Wurzeln vom Typ II oder III überhaupt vor: Zu jeder Fixwurzel α gibt es in einem irreduziblen ${}^2A_{2n}$ -System einen I -Orbit $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \Phi$, so daß $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, d.h. $P_I(\alpha) = 2P_I(\alpha_i)$. Diese α_i und α werden als zueinander gehörig bezeichnet.
- (5) Wenn α nicht vom Typ II (nicht reduziert, kurz) ist, sind alle Wurzeln des I -Orbits $I\alpha$ orthogonal aufeinander.

- (6) W^I ist die Weylgruppe von $P_I(\Phi)$. Falls α nicht vom Typ II ist, ist die Spiegelung an der Wurzel $P_I(\alpha)$ in W^I gerade $s_{I\alpha} := \prod_{\gamma \in I\alpha} s_\gamma$, wobei die Reihenfolge der Spiegelungen s_γ aufgrund der Orthogonalitätsaussage (5) irrelevant ist. Falls α vom Typ II ist, ist die Spiegelung bzgl. $P_I(\alpha)$ klarerweise gleich der Spiegelung bzgl. $2P_I(\alpha) \in P_I(\Phi)$.
- (7) Alle Wurzeln vom Typ I oder II sind über W^I konjugiert zu einer Wurzel in Δ . Die Wurzeln vom Typ III sind über W^I konjugiert zur Summe der beiden Wurzeln vom Typ II in $\Delta = \Delta(A_{2n})$.
- (8) $(P_I(\alpha))^\vee = \left\{ \begin{array}{ll} S_{I\alpha^\vee} & \text{falls } \alpha \text{ nicht vom Typ II ist} \\ 2 \cdot S_{I\alpha^\vee} & \text{falls } \alpha \text{ vom Typ II ist} \end{array} \right\} = c(\alpha) \cdot S_{I\alpha^\vee}$
- (9) $P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I$ operiert als affine Weylgruppe (zu W^I) auf V^I und zwar erzeugt von den Spiegelungen ($\in \text{End } V^I$) an den Hyperebenen

$$H_{I\alpha, k} := \{v \in V^I \mid (P_I\alpha^\vee)^\vee(v) = -k\} \stackrel{(8)}{=} \{v \in V^I \mid c(\alpha) \cdot S_{I\alpha}(v) = -k\}$$

(für $k \in \mathbb{Z}$). Das c wurde in 2.3 bzw. im Punkt (8) definiert. Beachte: Wenn α vom Typ III ist und zu α_1, α_2 vom Typ II gehört, ist $H_{I\alpha, k} = H_{I\alpha_1, 2k}$.

- (10) Sei $\Delta^* \subset V = \mathbb{Z}[\Phi^\vee] \otimes \mathbb{R}$ die Dualbasis zu Δ , genauer sei $\Delta^* = \{\beta_\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta\}$, so daß $\gamma(\beta_\alpha^\vee) = \delta_{\gamma, \alpha}$ für $\gamma \in \Delta$. Die Dualbasis von V^I zu $(P_I(\Delta^\vee))^\vee$ ist die Menge der $\frac{1}{c(\alpha)}P_I(\beta_\alpha^\vee)$ für alle Orbiten $I\alpha \subset \Delta$. Dagegen bildet $P_I(\Delta^*)$ eine \mathbb{Z} -Basis von

$$\mathbb{Z}[(P_I(\Phi^\vee))^\vee]^* := \{v \in V^I \mid \alpha(v) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } \alpha \in (P_I(\Phi^\vee))^\vee\}.$$

Falls nur Wurzeln vom Typ I in Φ vorkommen, ist $c(\alpha) = 1(!)$.

Die Punkte (3)–(10) sind prinzipiell auch noch gültig, wenn Φ nicht mehr irreduzibel angenommen wird.

Definition 2.6. *Einem Wurzelsystem $\Phi \in V$ und einer Gruppe $I \subset \text{Aut}(\Phi)$ kann man nun zwei Wurzelsysteme zuordnen:*

$$\Phi_I := \{P_I(\alpha) \mid \alpha \in \Phi\} = P_I(\Phi) \quad \text{und} \quad \Phi^I = ((\Phi^\vee)_I)^\vee \supset \{S_{I\alpha} \mid \alpha \in \Phi\}.$$

Vorbereitungen zum Satz von Steinberg

Lemma 2.7. *Sei spl_G ein Splitting von G und $I^* \subset \text{Aut}(G, \text{spl}_G)$ eine Gruppe. Dann ist $1 \rightarrow T^{I^*} \rightarrow N(T)^{I^*} \rightarrow W^{I^*} \rightarrow 1$ exakt und es gibt eine (durch spl_G) eindeutig bestimmte Liftung $W \rightarrow N(T) : w \mapsto n(w)$ ("Steinberglift") mit $\sigma^*(n(w)) = n(w)$.*

Beweis: Es reicht, den Steinberglift in eine zu G_{der} isogene Gruppe anzugeben. Da G_{sc} (oder G_{ad}) immer ein direktes Produkt einfacher Faktoren ist, darf man o.E. G einfach algebraisch annehmen. Weiter wird angenommen, daß $\Phi(G)$ vom Typ ADE ist, d.h. alle Wurzeln dieselbe Länge haben. Alle anderen (einfachen) Gruppen erhält man als Fixgruppen unter geeigneten (Splitting–fixierenden) Automorphismen, wie aus Tabelle 2.5.1 hervorgeht. Es ist nicht schwer zu sehen (und auf Seite 20 im 3. Schritt von Satz 2.12 ausführlich dargestellt), daß $\Phi(G^{I^*}) = \Phi_I$, falls Φ_I reduziert ist. Man liest der Tabelle ab, daß man jedes Wurzelsystem (insbesondere B_n und C_n !) als reduziertes (!) System Φ_I realisieren kann mit geeigneten ADE–Systemen und Automorphismen. Um das Problem weiter zu vereinfachen benutzt man folgenden

Fakt 2.8 ([Sp81, 10.2.3]). *Sei μ eine Abbildung von $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ in ein multiplikatives Monoid mit 1 mit den folgenden Eigenschaften: Wenn $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha \neq \beta$, dann*

$$\mu(s_\alpha)\mu(s_\beta)\mu(s_\alpha)\dots = \mu(s_\beta)\mu(s_\alpha)\mu(s_\beta)\dots,$$

wobei auf beiden Seiten genau $m(\alpha, \beta) := \text{ord}(s_\alpha s_\beta)$ Faktoren stehen.

Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung von μ auf W , so daß für jedes vollständig gekürzte Wort $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_k}$ gilt $\mu(w) = \mu(s_{\alpha_1}) \cdots \mu(s_{\alpha_k})$.

Daher werden jetzt Repräsentanten für die Basisspiegelungen s_α , $\alpha \in \Delta$ konstruiert und dann die Bedingungen von Fakt 2.8 verifiziert. (Der Fall ${}^2A_{2n}$ erfordert später Nachbesserungen dieser Konstruktion!) Weil Φ vom Typ ADE ist, hat man nur zwei Fälle $m(\alpha, \beta) = 2, 3$ zu untersuchen.

Konstruktion der Steinbergrepräsentanten für $\alpha \in \Delta$ vom Typ I: Zu jedem Wurzelvektor X_α aus \mathfrak{sl}_G gibt es genau einen Wurzelvektor $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, so daß $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$. Dann

$$n(s_\alpha) := \exp(X_\alpha)\exp(-X_{-\alpha})\exp(X_\alpha) =: n(X_\alpha)$$

(Die Bezeichnung $n(X_\alpha)$ ist ehrlicher und bald nützlich.) Durch $\{X_\alpha, H_\alpha, X_{-\alpha}\}$ ist eine Einbettung $\text{Sl}_2 \hookrightarrow G$ festgelegt. Dann ist $n(s_\alpha)$ das Bild von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ unter dieser Einbettung.

Fall 1: $m(\alpha, \beta) = 2$, (d.h. $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 0$)

$$n(X_\alpha)n(X_\beta)n(X_\alpha)^{-1} = n\left(\text{int}(n(X_\alpha))(X_\beta)\right) = n\left(\text{int}_t(X_{s_{\alpha^\vee}(\beta)})\right)$$

für ein geeignetes $t = \alpha^\vee(h) \in T$, denn das Bild der Sl_2 zu X_α trifft den Torus T in $\alpha^\vee(\mathbb{G}_m)$. Weil $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 0$, ist $s_{\alpha^\vee}(\beta) = \beta$ und $\text{int}(\alpha^\vee(h))(X_\beta) = h^{\langle \beta, \alpha^\vee \rangle} X_\beta = X_\beta$. Also hat man oben: $n(X_\alpha)n(X_\beta)n(X_\alpha)^{-1} = n(X_\beta)$, was zu beweisen war.

Fall 2: $m(\alpha, \beta) = 3$, (d.h. $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = -1$) Durch (X_α, X_β) wird eine Einbettung einer Sl_3 nach G festgelegt (analog zu der Einbettung der Sl_2 oben). Daher darf

man die Rechnung $n(X_\alpha)n(X_\beta)n(X_\alpha) = n(X_\beta)n(X_\alpha)n(X_\beta)$ in einer Sl_3 verifizieren. Man rechnet ($\cdot := 0$)

$$n\left(\begin{pmatrix} 0 & x & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}\right)n\left(\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & y \\ \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)n\left(\begin{pmatrix} 0 & x & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & x & \cdot \\ -x^{-1} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & y \\ \cdot & -y^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x & \cdot \\ -x^{-1} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & xy \\ (xy)^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

und ebenso die andere Seite, die dasselbe ergibt.

Nun hat man in allen ADE-Systemen (nach Wahl des Splittings) kanonischen Repräsentanten $n(w)$. Zu zeigen bleibt, daß sie in G^{I^*} liegen, falls $w \in W^{I^*}$.

Fall A: Φ_I ist reduziert.

In diesem Fall sind alle $\alpha \in \Delta$ vom Typ I und für $\theta^* \in I^*$ hat man

$$\theta^*(n(X_\alpha)) = \exp(\theta^*(X_\alpha))\exp(\theta^*(-X_{-\alpha}))\exp(\theta^*(X_\alpha)) = n(\theta^*(X_\alpha)) = n(X_{\theta^*(\alpha)})$$

Nach (2.5.6) ist (für $\alpha \in \Delta$) der Steinbergrepräsentant $n(s_{P_I(\alpha)}) = \prod_{\gamma \in I\alpha} n(s_\gamma)$, wobei die Reihenfolge des Produkts irrelevant ist (nach dem, was bisher gezeigt wurde, denn Wurzeln in $I\alpha \subset \Delta$ sind paarweise orthogonal nach (2.5.5)). Daher ist $n(s_{P_I(\alpha)}) \in G^{I^*}$. Weil $P_I(\Delta)$ eine Basis von Φ_I bildet, ist man fertig.

Fall B: (Φ, I^*) ergibt ${}^2A_{2n}$:

Hier ist $G = \text{Sl}_{2n+1}$ und $G^{I^*} \simeq \text{SO}(2n+1)$ (vgl. Beispiel 2.19). In diesem Fall gibt es einen Orbit in Δ dessen Wurzeln nicht senkrecht aufeinander stehen. Man definiert nun für $\alpha \in \Delta$ vom Typ II

$$n(s_{P_I(\alpha)}) := \exp\left(\sum_{\gamma \in I\alpha} X_\gamma\right) \cdot \exp\left(-c(\alpha) \cdot \sum_{\gamma \in -I\alpha} X_\gamma\right) \cdot \exp\left(\sum_{\gamma \in I\alpha} X_\gamma\right)$$

Diese Formel gilt auch für alle $\alpha \in \Delta$ vom Typ I (auch im vorigen Fall A). Nur falls α vom Typ II ist, ist die Bildung in Fall A verschieden von der Definition eben. Diese hat aber den Vorteil, daß $n(s_{P_I(\alpha)}) \in G^{I^*}$, denn weil I^* die Wurzelvektoren $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ stabilisiert, liegt $\sum_{\gamma \in I\alpha} X_\gamma \in \text{Lie}(G)^{I^*}$. Weil man nun einer Basispiegelung des B_n -Subsystems $\Phi(G^{I^*}) \subset \Phi_I$ einen neuen Steinbergrepräsentanten zugewiesen hat, muß man noch einmal Fakt 2.8 bemühen, um die neue Konstruktion (wortunabhängig) auf W^{I^*} auszudehnen.

Bezeichne $\alpha' \in \Delta$ eine der beiden Wurzeln vom Typ II. Falls $m(P_I(\alpha), P_I(\alpha')) = 2$, sieht man sofort, daß $n(s_{P_I(\alpha)})$ und $n(s_{P_I(\alpha')})$ vertauschen, denn alle Wurzeln in $I\alpha$ sind senkrecht auf denen von $I\alpha'$. Der verbleibende Fall ist $m(P_I(\alpha), P_I(\alpha')) = 4$. Ihn kann man in einer Sl_5 verifizieren. Dabei kann man $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha' = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ annehmen sowie

$$n\left(\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & x & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & x & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & x^{2/2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2/x^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad n\left(\begin{pmatrix} 0 & y & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & y \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & y & \cdot & \cdot & \cdot \\ -y^{-1} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & y \\ \cdot & \cdot & \cdot & -y^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

□

Lemma 2.9. *Sei Φ irreduzibel und ein Splitting \mathbf{spl}_G fixiert.*

Falls $\alpha \in \Phi$ nicht vom Typ III ist, gibt es eine Menge $\{X_\gamma \in \mathfrak{g}_\gamma \setminus \{0\} \mid \gamma \in I\alpha\}$, auf der I^ durch Permutation operiert: $\sigma^* X_\alpha = X_{\sigma^*(\alpha)}$. Insbesondere operiert I_α^* trivial auf \mathfrak{g}_α in diesen Fällen.*

Falls α vom Typ III ist, so ist $I\alpha = \{\alpha\}$ und $\sigma^ \in I^*$ operiert auf der Geraden \mathfrak{g}_α durch -1 genau dann, wenn σ nichttrivial auf Φ operiert.*

Beweis: Dem Splitting \mathbf{spl}_G entnimmt man die Basen X_α für alle \mathfrak{g}_α , $\alpha \in \Delta$.

Fall 1: α ist nicht vom Typ III.

Reduktion auf Δ : In diesem Fall ist α über W^I zu einer Wurzel aus Δ konjugiert (vgl. (2.5.7)), etwa $\beta := w(\alpha) \in \Delta$ mit $w \in W^I$. Weil der Steinbergrepräsentant $n(w)$ eines I -invarianten w nach (2.7) selbst I^* invariant ist, ist $\text{Ad } n(w)$ I^* -äquivariant. Das Bild von $\{X_\gamma \in \mathfrak{g}_\gamma \setminus \{0\} \mid \gamma \in I\alpha\}$ unter $\text{Ad } n(w)$ ist eine Menge der Form $\{X_\gamma \mid \gamma \in I\beta\}$ mit einer Basiswurzel $\beta \in \Delta$. Also genügt es, das Lemma für Wurzeln $\alpha \in \Delta$ zu zeigen. Diese Aussage ist aber nach Definition von $I^* \subset \text{Aut}(G, \mathbf{spl}_G)$ klar.

Fall 2: α ist vom Typ III.

Hier kann man sich nicht auf den Fall $\alpha \in \Delta$ zurückziehen. Allerdings ist jede Wurzel vom Typ III über W^I konjugiert zu einer Wurzel der Höhe 2 bzgl. Δ (d.h. Summe zweier Wurzeln aus Δ). Indem man, wie im ersten Fall, mit dem I^* -invarianten Steinbergrepräsentanten eines geeigneten $w \in W^I$ konjugiert, kann man hier annehmen, daß $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta$. Dann ist $X_\alpha := [X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}] \in \mathfrak{g}_\alpha$ und σ^* permutiert $\{X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}\}$. Diese Permutation ist genau dann trivial, wenn σ trivial auf $\Phi = \Phi(A_{2n})$ operiert. Andernfalls ist klarerweise $\sigma^* X_\alpha = [X_{\alpha_2}, X_{\alpha_1}] = -X_\alpha$. \square

(2.10) Sei Φ irreduzibel, X_* ein Gitter mit $\mathbb{Z}[\Phi^\vee] \subset X_* \subset \mathbb{Z}[\Phi]^*$ und $V_P := \text{Kern } P_I \subset V = X_* \otimes \mathbb{C}$. Man hat die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow V_P / (X_* \cap V_P) \rightarrow V / X_* \rightarrow V^I / P_I(X_*) \rightarrow 0$$

(z.B. durch das Schlangenlemma aus folgendem kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V_P & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V^I \longrightarrow 0 \\ & & \cup & & \cup & & \cup \\ 0 & \longrightarrow & X_* \cap V_P & \longrightarrow & X_* & \longrightarrow & P_I(X_*) \longrightarrow 0. \end{array}$$

In der zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenz

$$\dots \rightarrow \underbrace{H^1(I^*, V_P / (X_* \cap V_P))}_{=1 \text{ nach Lemma 2.11}} \rightarrow H^1(I^*, V / X_*) \xrightarrow{\overline{P}_I} H^1(I^*, V^I / P_I(X_*)) \rightarrow \dots$$

ist nach folgendem Lemma \overline{P}_I eine Inklusion.

Lemma 2.11. *Falls Φ irreduzibel ist, ist $H^1(I^*, V_P/(X_* \cap V_P)) = 1$.*

Beweis: Es werden alle irreduziblen Fälle in (2.5.1) durchgerechnet.

Fall 1: Φ ist nicht 6D_4 .

In diesem Fall ist $I^* = \langle \theta \rangle$ zyklisch (von der Ordnung 2 bzw. 3). Daher ist $V_P = (\theta - 1)V$ und θ operiert auf V_P anisotrop, i.e. $V_P^I = 0$. Somit ist $(1 - \theta)V_P = V_P$ und man hat

$$H^1(I^*, V_P/(X_* \cap V_P)) \simeq \text{Kern}(1 + \theta + \dots + \theta^{\text{ord}\theta - 1})\text{Big}/(1 - \theta)(V_P/(X_* \cap V_P)) = 1.$$

Fall 2: $\Phi = {}^6D_4$.

In diesem Fall gilt $I^* \simeq S_3 \simeq \langle \theta_3 \rangle \rtimes \langle \theta_2 \rangle$ für geeignete θ_3, θ_2 der Ordnung 3 bzw. 2. Nach (2.5.1) ist $V^I = V^{\theta_3}$, d.h. $V_P = (1 - \theta_3)V$. Die Hochschild–Serre–Spektralsequenz ergibt (mit $\overline{V_P} := V_P/(X_* \cap V_P)$)

$$1 \longrightarrow H^1(\langle \theta_2 \rangle, \overline{V_P}^{\theta_3}) \longrightarrow H^1(I^*, \overline{V_P}) \longrightarrow H^1(\langle \theta_3 \rangle, \overline{V_P})^{\theta_2} \longrightarrow \dots$$

Die linke Kohomologiegruppe ist trivial, weil $\overline{V_P}^{\theta_3} = ((1 - \theta_3)V/(X_* \cap V_P))^{\theta_3} \simeq H^1(\langle \theta_3 \rangle, X_* \cap V_P)$ eine 3–Torsionsgruppe ist und $\text{ord}\theta_2 = 2$. Nach Fall 1 ist $H^1(\langle \theta_3 \rangle, \overline{V_P}) = 1$. \square

Der Satz von Steinberg

Der folgende Satz ist eher eine Inhaltsübersicht dieses Paragraphen. Er verallgemeinert den Satz von Steinberg [St68, 8.1] auf (nichtzyklische) Automorphismengruppen I von G , die ein gegebenes Paar (B, T) stabilisieren.

Satz 2.12. *Sei G eine reduktive Gruppe mit Radikal $Z := \text{Cent}(G)^\circ$ und I eine Untergruppe von $\text{Aut}(G, B, T)$. Dann ist $(G^I)^\circ$ eine reduktive Gruppe mit Wurzeldatum*

$$\Psi(G^{I^\circ}, T^{I^\circ}) = \left(P_I(X^*(T)), \tilde{\Phi}, X_*(T)^I, \tilde{\Phi}^\vee \right),$$

wobei $\tilde{\Phi} \subset \Phi_I$ und $\tilde{\Phi}^\vee \subset (\Phi^\vee)^I$. Genauere Bedingungen dafür, daß ein Orbit $I\alpha$ Wurzel in $\tilde{\Phi}$ ist, sind in Beh. 2.15, Lemma 2.17 und Bsp. 2.18 gegeben.

Die unipotente Untergruppe $U_{I\alpha}$ zur Wurzel $P_I(\alpha) \in \Phi(G^{\theta^\circ}, T^{\theta^\circ})$ ist als Varietät isomorph zum Bild von U_α in $\prod_{\sigma \in I/I_\alpha} \sigma U_\alpha$ unter $x \mapsto \prod_{\sigma \in I/I_\alpha} \sigma(x)$ (in irgendeiner festgelegten Reihenfolge des Produkts).

Um $\pi_0(G^I) = G^I/G^{I^\circ} \simeq N(T)^I/(N(T)^I \cap G^{I^\circ})$ zu beschreiben, seien

$$\kappa(G) := \text{Kern}[T_{sc} \times Z \twoheadrightarrow T]$$

$$W_2 := \text{Bild}[N(T)^I \rightarrow W^I] = \text{Kern}\left[W^I \xrightarrow{\delta} H^1(I, T)\right] \simeq N(T)^I/T^I$$

$$W_1 := \text{Bild}[N_{sc}(T_{sc})^I \rightarrow W^I] = \text{Kern}\left[W^I \xrightarrow{\delta_{sc}} H^1(I, T_{sc})\right] \simeq N_{sc}(T_{sc})^I/T_{sc}^I$$

$$W_0 := \text{Bild}[N(T) \cap G^{I^\circ} \rightarrow W^I] = \text{Bild}[N_{sc}(T_{sc}) \cap G_{sc}^{I^\circ} \rightarrow W^I] = W(\text{Lie}(G)^I)$$

Man hat dann

$$\begin{aligned}
1 \rightarrow T^I/T^{I^\circ} &\rightarrow N(T)^I/(N(T)^I \cap G^{I^\circ}) \rightarrow W_2/W_0 \rightarrow 1 && \text{ist exakt.} \\
1 \rightarrow Z^I/(Z \cap T^{I^\circ}) &\rightarrow T^I/T^{I^\circ} \rightarrow H^1(I^*, \kappa(G)) \rightarrow H^1(I^*, T_{sc} \times Z) && \text{ist exakt.} \\
W_2/W_1 &\simeq \text{Bild}[W^I \rightarrow H^1(I, T_{sc})] \cap \text{Bild}[H^1(I, \kappa(G)) \rightarrow H^1(I, T_{sc})]
\end{aligned}$$

Für irreduzibles Φ hat man

$$\begin{aligned}
W_1 &\simeq \bigcap_{\sigma \in I} \text{Bild} \left[\left(P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I \right)_{P_I(Y_\sigma)} \xrightarrow{\text{Proj.}} W^I \right] \cap \bigcap_{t \in I \cap T_{ad}} W_t \\
&\simeq \bigcap_{\sigma \in I} \left\langle s_{I\alpha} \mid \begin{array}{ll} S_{I\alpha}(t_\sigma) = 1, & \text{falls } \alpha \text{ vom Typ I} \\ (2S_{I\alpha})(t_\sigma) = 1, & \text{falls } \alpha \text{ vom Typ III} \end{array} \right\rangle \cap \bigcap_{t \in I \cap T_{ad}} W_t
\end{aligned}$$

Die Reduktion auf irreduzible Wurzelsysteme geht wie folgt: Es gibt irreduzible Wurzelsysteme $\Phi_i \subset \Phi$, so daß $\Phi = \bigoplus_i \text{Ind}_{I_i}^I \Phi_i$, wobei $I_i := \{\sigma \in I \mid \sigma(\Phi_i) \subset \Phi_i\}$ und $I_{\Phi_i} := \{\sigma \in I_i \mid \sigma|_{\Phi_i} = \text{id}\}$. Damit gehen auch entsprechende Zerlegungen von G_{sc} , T_{sc} , V , $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]$, $\mathbb{Z}[\Phi]^*$ und W einher.

Beweis: G^I ist eine algebraische Gruppe. Um zu zeigen, daß sie reduktiv ist, wird in Behauptung 2.16 gezeigt, daß das unipotente Radikal $R_u(G^{I^\circ})$ trivial ist. Aus der Eindeutigkeitsaussage der Bruhatzerlegung von G bzgl. (B, T, W) ergibt sich, daß G^{I° von T^{I° , U^I und $\text{Norm}(T)^I$ erzeugt wird. Diese Untergruppen werden der Reihe nach (in Schritt 1 bzw. 2 bzw. 4) beschrieben.

1. Schritt: Berechnung von T^I .

Man berechnet besser $T^{I^*} = T^I$. Aus der langen exakten Kohomologiesequenz zur exakten Sequenz, die $\kappa(G)$ definiert,

$$1 \rightarrow \kappa(G) \rightarrow T_{sc} \times Z \rightarrow T \rightarrow 1$$

erhält man, weil $H^1(I^*, \kappa(G))$ endlich ist und T_{sc}^I nach Behauptung 2.13 unten zusammenhängt, folgende exakte Sequenzen

$$1 \longrightarrow \kappa(G)^{I^*} \cap (T_{sc} \times Z^{I^\circ}) \longrightarrow T_{sc}^I \times Z^{I^\circ} \longrightarrow T^{I^\circ} \longrightarrow 1$$

und

$$(i) \quad 1 \rightarrow Z^I/(Z \cap T^{I^\circ}) \rightarrow T^I/T^{I^\circ} \rightarrow H^1(I^*, \kappa(G)) \rightarrow H^1(I^*, T_{sc} \times Z)$$

Wenn $Z = 1$, d.h. die Gruppe halbeinfach ist, ist diese Formel nicht mehr so unhandlich. Für einfache Gruppen wird T^I/T^{I° mit ihr in Behauptung 2.14 vollständig ausgerechnet.

Behauptung 2.13. T_{sc}^I und T_{ad}^I sind zusammenhängend und

$$H^1(I^*, T_{sc}) \simeq H^1(I^*, \mathbb{G}_m^\Delta) \simeq \bigoplus_{I\alpha \subset \Delta} H^1(I^*, \text{Ind}_{I_\alpha^*}^{I^*} \mathbb{G}_m) \stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} \bigoplus_{I\alpha \subset \Delta} \text{Hom}(I_\alpha^*, \mathbb{G}_m).$$

Beweis: Man hat die Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\alpha \in \Delta} \mathbb{G}_m & \xrightarrow{\sim} & T_{sc} \\ (x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} & \mapsto & \prod_{\alpha \in \Delta} (\alpha^\vee(x_\alpha)) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T_{ad} & \xrightarrow{\sim} & \prod_{\alpha \in \Delta} \mathbb{G}_m \\ t & \mapsto & (\alpha(t))_{\alpha \in \Delta} \end{array}$$

Weil alle $\sigma \in I$ die Basen $\Delta = \Delta(B, T)$ bzw. Δ^\vee permutieren, operieren die $\sigma \in I$ in beiden Fällen auf $\prod_{\alpha \in \Delta} \mathbb{G}_m$ durch Permutation der Komponenten. Daher sind T_{sc}^I und T_{ad}^I isomorph zu $\{(x_\alpha)_\alpha \in \prod_{\alpha \in \Delta} \mathbb{G}_m \mid x_{\sigma\alpha} = x_\alpha \text{ für alle } \sigma \in I\} \simeq \prod_{I\alpha \subset \Delta} \mathbb{G}_m$. Dies ist ein (zusammenhängender) Torus. \square

Behauptung 2.14. Sei Φ irreduzibel und G einfach. Dann gilt

$$H^1(I^*, \kappa(G)) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{falls } \begin{cases} \Phi = {}^2A_{2n-1} \text{ und } \kappa(G) \text{ gerade} \\ \Phi = {}^2D_{2n-1} \text{ und } \kappa(G) \neq 1 \\ \Phi = {}^2D_{2n} \text{ und } \kappa(G) \simeq \mathbb{Z}/2 \end{cases} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\text{Kern}[H^1(I^*, \kappa(G)) \rightarrow H^1(I^*, T_{sc})]$ ist genau dann nichttrivial, wenn $(\Phi, \kappa(G))$ in folgender Liste vorkommt:

- Φ ist vom Typ ${}^2A_{2n-1}$ und $0 \neq \kappa(G) \subset \kappa(\Phi)^2 \simeq \mathbb{Z}/n$ und $\kappa(G)$ ist gerade.
- Φ ist vom Typ 2D_n und $\kappa(G) \simeq \mathbb{Z}/2$ (und I -stabil).

In diesen Fällen ist $\text{Kern}[H^1(I^*, \kappa(G)) \rightarrow H^1(I^*, T_{sc})] \simeq \mathbb{Z}/2$. (Beachte: In den 2D_n -Fällen hat $\kappa(\Phi)$ genau eine Untergruppe der Ordnung 2, die von I auf sich abgebildet wird. Diese ist oben gemeint.)

Beweis: Da keine Rationalitätsfragen behandelt werden, darf man (nach 1.11(d)) $\kappa(G) = \text{Kern}\rho$ mit $\pi_1(G)$ identifizieren. (Sie sind als Gruppen isomorph, nicht als Galoismoduln, was hier nicht stört.) Zuerst wird $H^1(I^*, \kappa(G))$ in allen Fällen berechnet.

Fall 1: $I^* = \langle \theta \rangle$ ist zyklisch ($\neq 1$).

Typ von Φ	$\kappa(G)$	$\theta _{\kappa(G)}$	$H^1(\langle \theta \rangle, \kappa(G))$
${}^2A_{2n-1}$	$m\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ $m \mid 2n$	-1	$\mathbb{Z}/2$ falls $2n/m$ gerade 0 sonst
${}^2A_{2n}$	$m\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ $m \mid 2n+1$	-1	0
${}^2D_{2n-1}$	$m\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ $m \mid 4$	-1	$\mathbb{Z}/2$ falls $m \neq 4$ 0 falls $m = 4$
${}^2D_{2n}$	\mathbb{F}_2^2 $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{F}_2^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{End}(\mathbb{F}_2^2)$	0 $\mathbb{Z}/2$
3D_4	\mathbb{F}_2^2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{End}(\mathbb{F}_2^2)$	0
2E_6	$\mathbb{Z}/3$	-1	0

Fall 2: $\Phi = {}^6D_4$, $I^* = \langle \theta_3 \rangle \rtimes \langle \theta_2 \rangle$.

Man reduziert sich mit Hochschild–Serre auf den zyklischen Fall:

$$1 \rightarrow H^1(\langle \theta_2 \rangle, \kappa(G)^{\theta_3}) \rightarrow H^1(I^*, \kappa(G)) \rightarrow \underbrace{H^1(\langle \theta_3 \rangle, \kappa(G))^{\theta_2}}_{=0 \text{ siehe Fall 1}} \rightarrow \dots$$

Weil die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Gl}(2, \mathbb{F}_2)$ keinen Eigenwert 1 besitzt, ist $\kappa(G)^{\theta_3} = 0$. Darum verschwindet auch die erste Kohomologiegruppe und man hat $H^1(I^*, \kappa(G)) = 1$ für $\Phi = {}^6D_4$.

Um Kern $[H^1(I^*, \kappa(G)) \rightarrow H^1(I^*, T_{sc})]$ zu untersuchen, hat man nun nur noch Fälle zu betrachten, in denen $I^* = \langle \theta \rangle \simeq \mathbb{Z}/2$, $\kappa(G) = \text{Kern}(1 + \theta)|_{\kappa(G)}$ und $H^1(I^*, \kappa(G))$ von der Ordnung 2 ist. Betrachte das kommutative Diagramm ($\kappa(G) = \pi_1(G)$)

$$\begin{array}{ccc} H^1(I^*, \pi_1(G)) & \xrightarrow{\bar{i}} & H^1(I^*, T_{sc}) \\ \simeq \uparrow & & \uparrow \simeq \\ (X_*(T)/\mathbb{Z}[\Phi^\vee])/(1 - \theta)\pi_1(G) & \xrightarrow{\bar{i}} & \text{Kern}(1 + \theta)/((1 - \theta)V + \mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \end{array}$$

in dem die horizontalen Abbildungen von Inklusionen herkommen und die vertikalen mit Hilfe der Exponentialabbildung (und der zyklischen Kohomologie) entstehen. Eine Klasse $\beta^\vee + \mathbb{Z}[\Phi^\vee] \in \pi_1(G) \simeq X_*(T)/\mathbb{Z}[\Phi^\vee]$ ist demnach genau dann im Kern (von \bar{i}), wenn $\beta^\vee \in (1 - \theta)V + \mathbb{Z}[\Phi^\vee]$.

Fall 1: Φ ist vom Typ ${}^2D_{2n}$ und $\pi_1(G) \simeq \mathbb{Z}/2$ (I -stabil).

Sei $\beta_1^\vee \in \mathbb{Z}[\Phi]^*$ ein Vertreter der nichttrivialen Klasse in $\pi_1(G)$. Weil $H^1(\langle \theta \rangle, \pi_1(\Phi))$ trivial ist (s.o.), existiert ein $\beta_3^\vee \in \mathbb{Z}[\Phi]^*$, so daß $\beta_1^\vee \equiv (1 - \theta)\beta_3^\vee \pmod{\mathbb{Z}[\Phi^\vee]}$, d.h. $\beta_1^\vee \in (1 - \theta)V + \mathbb{Z}[\Phi^\vee]$.

Fall 2: Φ ist vom Typ ${}^2A_{2n-1}$ oder ${}^2D_{2n-1}$.

Nach Behauptung 2.13 und (i) auf Seite 14 weiß man, daß für $\pi_1(G_{ad}) \simeq \mathbb{Z}[\Phi]^*/\mathbb{Z}[\Phi^\vee] = \pi_1(\Phi)$ die Abbildung \bar{i} injektiv ist. Daher gibt es (genau eine) Klasse $\beta_1^\vee \in \pi_1(\Phi)$, die nicht in $(1 - \theta)V + \mathbb{Z}[\Phi^\vee]$ liegt. In den hier betrachteten Fällen ist $\pi_1(\Phi)$ zyklisch und θ operiert durch -1 (auf $\pi_1(\Phi)$). Also ist \bar{i} genau dann nicht injektiv (d.h. die Nullabbildung), wenn $0 \neq \pi_1(G) \subset \pi_1(\Phi)^2$ und $\pi(G)$ gerade ist. \square

2. Schritt: Beschreibung von $\text{Lie}(G)^I$ und damit von G^{I° .

Wegen der Wurzelraumzerlegung $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G) = \text{Lie}(T) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ ist \mathfrak{g}^I direkte Summe von $\text{Lie}(T)^I$ und $(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha)^I$. Dieser letzte Raum wird hier beschrieben. Man erhält in (iii) unten eine Zerlegung der Gestalt

$$\mathfrak{g}^I = \text{Lie}(T)^I \oplus \bigoplus_{I\alpha} \mathfrak{g}_{I\alpha},$$

in gewisse (eindimensionale) Gewichtsräume zu Gewichten der T^{I° -Operation auf \mathfrak{g}^I . Definiere für alle $\sigma \in I$

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{I\alpha}(\sigma) : \bigoplus_{X} \mathfrak{g}_\gamma & \longrightarrow & \bigoplus_{\sigma(X)} \mathfrak{g}_\gamma \\ & \longmapsto & \end{array}$$

Nach Wahl einer Basis $(X_\gamma \in \mathfrak{g}_\gamma \mid \gamma \in I\alpha)$ für die Wurzelräume $\bigoplus_{\gamma \in I\alpha} \mathfrak{g}_\gamma$ erhält man $\tilde{\varphi}_{I\alpha}(\sigma) \in \prod_{\gamma \in I\alpha} F^\times$ durch $\sigma X_\gamma = [\tilde{\varphi}_{I\alpha}(\sigma)]_{\sigma\gamma} \cdot X_{\sigma\gamma}$, so daß

$$\varphi_{I\alpha}(\sigma) \left(\sum_{\gamma \in I\alpha} X_\gamma \right) = \sigma \left(\sum_{\gamma \in I\alpha} X_\gamma \right) = \sum_{\gamma \in I\alpha} [\tilde{\varphi}_{I\alpha}(\sigma)]_\gamma \cdot X_\gamma.$$

Auf $\prod_{\gamma \in I\alpha} F^\times$ operiert I durch Permutation der Komponenten $[\sigma(x)]_\gamma = x_{\sigma^{-1}\gamma}$. Es gilt $\tilde{\varphi}_{I\alpha} \in Z^1(I, \prod_{\gamma \in I\alpha} F^\times)$, denn nach der Basiswahl wird die Operation von I durch Monomialmatrizen beschrieben; Nach Definition ist $\tilde{\varphi}_{I\alpha}$ der Diagonalanteil bei der Zerlegung "Monomialmatrix = Diagonalmatrix \times Permutationsmatrix" und die Operation von σ auf $\prod_{\gamma \in I\alpha} F^\times$ ist gerade so eingerichtet, daß sie der Konjugation mit dem Permutationsanteil entspricht. Ein Basiswechsel zu einer zweiten Basis $(X'_\gamma \in \mathfrak{g}_\gamma)$ (bei festgehaltener Reihenfolge der $\gamma \in I\alpha$) ändert $\tilde{\varphi}_{I\alpha}$ klarerweise um einen Korand ab. Dadurch ist $\varphi_{I\alpha}$ (i.e. $\sigma|_{\bigoplus_{\gamma \in I\alpha} \mathfrak{g}_\gamma}$) eine Klasse in $H^1(I, \prod_{\gamma \in I\alpha} F^\times)$ zugeordnet. Nach Shapiros Lemma hat man

$$(ii) \quad H^1(I, \prod_{\gamma \in I\alpha} F^\times) \simeq H^1(I_\alpha, F^\times) = \text{Hom}(I_\alpha, F^\times)$$

$$\left(I \ni \sigma \mapsto (\dots, x_\gamma(\sigma), \dots)_{\gamma \in I\alpha} \right) \longmapsto \left(I_\alpha \ni \sigma \mapsto x_\alpha(\sigma) \right)$$

wobei I_α der Fixator von α in I ist.

Für eine Wurzel $\alpha \in \Phi$ ist $\alpha_{\text{res}} \stackrel{\text{Def.}}{=} \alpha|_{T^{\text{Lo}}}$ genau dann eine Wurzel in $\text{Lie}(G^I)$, wenn

$$0 \neq \mathfrak{g}_{I\alpha} := \left\{ x \in \bigoplus_{\gamma \in I\alpha} \mathfrak{g}_\gamma \mid \varphi_{I\alpha}(\sigma)(x) = x \text{ für alle } \sigma \in I \right\}.$$

Behauptung 2.15. *Der Raum $\mathfrak{g}_{I\alpha}$ ist höchstens eindimensional und zwar gilt:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{I\alpha} \neq 0 &\Leftrightarrow [\tilde{\varphi}_{I\alpha}(\sigma)]_\alpha = 1 \text{ für } \sigma \in I_\alpha. \\ &\Leftrightarrow \tilde{\varphi}_{I\alpha} \text{ ist trivial in } H^1(I, \prod_{\gamma \in I\alpha} F^\times). \\ &\Leftrightarrow I|_{\bigoplus_{\gamma \in I\alpha} \mathfrak{g}_\gamma} \simeq I^*|_{\bigoplus_{\gamma \in I\alpha} \mathfrak{g}_\gamma} \end{aligned}$$

Beweis: Damit $\mathfrak{g}_{I\alpha} \neq 0$, ist es offensichtlich notwendig, daß $[\tilde{\varphi}_{I\alpha}(\sigma)]_\alpha = 1$ für $\sigma \in I_\alpha$. Hat man umgekehrt dies, so wird $\tilde{\varphi}_{I\alpha}$ bei Shapiros Isomorphismus (ii) auf Eins abgebildet. Also operiert I bei geeigneter Basiswahl durch Permutationsmatrizen. Diese fixieren aber immer einen Unterraum. Also ist $\mathfrak{g}_{I\alpha} \neq 0$. Bei transitiver Aktion der Permutationsgruppe ist der Fixraum eindimensional. Die mittlere Äquivalenz ist wieder mit Shapiro (ii) klar. Die letzte Aussage ist eine Umformulierung der zweiten. \square

Man erhält also

$$(iii) \quad \mathfrak{g}^I = \text{Lie}(T)^I \oplus \bigoplus_{I\alpha} \mathfrak{g}_{I\alpha},$$

wobei die Summe über alle I -Orbiten $I\alpha$ von Wurzeln aus Φ gebildet wird, für die gilt: $I|_{\mathfrak{g}_\gamma} \simeq I^*|_{\mathfrak{g}_\gamma}$. In Bsp. 2.18 unten wird in Spezialfällen ein griffigeres Kriterium für diese Orbiten $I\alpha$ gegeben. Für $X \in \mathfrak{g}_{I\alpha}$ und $t \in T^{I^\circ}$ hat man $\text{Ad } t(X) = \alpha(t) \cdot X$, d.h. $\mathfrak{g}_{I\alpha}$ ist (eindimensionaler) Gewichtsraum für die Operation von T^{I° auf \mathfrak{g}^I zum Gewicht $\alpha|_{\text{res}} := \alpha|_{T^{I^\circ}}$.

Behauptung 2.16. $G^{I^\circ} := (G^I)^\circ$ ist reduktiv.

Beweis: Nach den Bedingungen in (iii) gilt $\mathfrak{g}_{I\alpha} \neq 0 \iff \mathfrak{g}_{I(-\alpha)} \neq 0$. Daher erzeugen $\mathfrak{g}_{I\alpha}$ und $\mathfrak{g}_{-I\alpha}$ eine $\mathfrak{sl}_2 \subset \mathfrak{g}^I$, sobald der Orbit $I\alpha$ den Bedingungen in (iii) genügt. (Erinnerung: Weil $I \subset \text{Aut}(G, B, T)$ sind alle Wurzeln in $I\alpha$ von derselben Parität (positiv bzw. negativ).) Daher gibt es keine nilpotenten Elemente im Radikal $\text{Rad}(\mathfrak{g}^I)$ von \mathfrak{g}^I , d.h. $\text{Rad}(\mathfrak{g}^I)$ ist halbeinfach (Jordanzerlegung!). Weil $\text{Lie}(G^{I^\circ}) = \text{Lie}(G)^I = \mathfrak{g}^I$ und $\text{Lie}(\text{Rad}(G)) = \text{Rad}(\text{Lie}(G))$, folgt daraus, daß G^{I° reduktiv ist. \square

Wähle für alle $\sigma \in I$ ein $Y_\sigma \in \text{Lie}(T)$, so daß $\sigma = \text{int} t_\sigma \circ \sigma^*$ mit $t_\sigma := \exp(Y_\sigma)$. Ein t_σ ist dadurch modulo $\text{Cent}(G)$ eindeutig bestimmt und $\sigma \mapsto \text{int} t_\sigma$ ist ein 1-Kozykel von I mit Werten in T_{ad} . Genauso ist Y_σ modulo $X_*(T_{ad})$ bestimmt und $(\sigma \mapsto Y_\sigma + \mathbb{Z}[\Phi]^*)$ ist ein 1-Kozykel von I mit Werten in $V/\mathbb{Z}[\Phi]^*$. Sei

$$\begin{aligned} \phi_{I\alpha} : V/\mathbb{Z}[\Phi]^* \simeq T_{ad} &\longrightarrow \prod_{\gamma \in I\alpha} F^\times \\ \exp(Y) = t &\longmapsto (\dots, \gamma(t), \dots)_{\gamma \in I\alpha} \end{aligned}$$

Lemma 2.17.

- (a) Falls α vom Typ I oder II ist, sind die Kohomologieklassen von $\tilde{\varphi}_{I\alpha}$ und $(\sigma \mapsto \phi_{I\alpha}(t_\sigma))$ in $H^1(I, \prod_{\gamma \in I\alpha} F^\times)$ gleich.
- (b) Sei $\alpha \in \Phi'$ vom Typ III und $\Phi' \subset \Phi$ irreduzibel. Indem man I^* als Bild von I in $\text{Out}(G) = \text{Aut}(G)/\text{Int}(G)$ auffasst, erhält man

$$\mathbb{Z}/2 \stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} \text{Hom}(I_\alpha^*/I_{\Phi'}^*, F^\times) \xrightarrow{\text{Inf}} \text{Hom}(I_\alpha, F^\times) \stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} H^1(I, \prod_{\gamma \in I\alpha} F^\times).$$

Sei η das Bild der nichttrivialen Klasse bei dieser Abbildung. Dann sind in $H^1(I, \prod_{\gamma \in I\alpha} F^\times)$ die Kohomologieklassen von $\tilde{\varphi}_{I\alpha}$ und $(\sigma \mapsto \phi_{I\alpha}(t_\sigma)) \cdot \eta$ gleich.

Beweis: Mit Shapiro (ii) reduziert man die Aussage darauf, daß für alle $\sigma \in I_\alpha$ gilt

$$[\tilde{\varphi}_{I\alpha}(\sigma)]_\alpha = c \cdot \alpha(t_\sigma) = c \cdot [\phi_{I\alpha}(t_\sigma)]_\alpha,$$

wobei $c = -1$, falls α vom Typ III ist und σ nichttrivial operiert auf der irreduziblen Komponente von Φ , in der α liegt, und sonst ist $c = 1$. Nach Lemma 2.9 weiß man, wie $\sigma^* \in I_\alpha^*$ auf \mathfrak{g}_α operiert (nämlich gerade das c oben produzierend) und $\text{int} t_\sigma$ operiert auf \mathfrak{g}_α durch $\alpha(t_\sigma)$. Daher ist die Gleichung oben für $\sigma = \text{int} t_\sigma \circ \sigma^* \in I_\alpha$ klar (nach Definition von $\tilde{\varphi}_{I\alpha}(\sigma)$). \square

Beispiel 2.18. (a) Sei $I = \langle \theta \rangle$ zyklisch. Dann ist $\mathfrak{g}_{I\alpha} \neq 0$ äquivalent zu

$$S_{I\alpha}(t_\theta) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha \text{ vom Typ I oder II} \\ -1 & \text{falls } \alpha \text{ vom Typ III} \end{cases}$$

(b) Sei Φ irreduzibel und $I \simeq I^*$. Dann ist $\mathfrak{g}_{I\alpha} \neq 0$ äquivalent zu

$$\forall \sigma \in I : S_{I\alpha}(t_\sigma) = \begin{cases} -1 & \text{falls } \alpha \text{ vom Typ III und } \sigma \neq id \text{ auf } \Phi \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Zu(a): Zuerst wird $I = \langle \theta \rangle$ zyklisch angenommen. Nach Behauptung 2.15 ist $\mathfrak{g}_{I\alpha} \neq 0 \Leftrightarrow [\tilde{\varphi}_{I\alpha}]_\alpha \equiv 1$ auf $I_\alpha = \langle \theta^m \rangle$ mit $m = \#I_\alpha$. Indem man mit Lemma 2.9 die Operation von θ^{*m} benutzt, gilt für $0 \neq X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$

$$[\tilde{\varphi}_{I\alpha}(\theta^m)]_\alpha \cdot X_\alpha = \theta^m X_\alpha = (\text{int } t_\theta \circ \theta^*)^m X_\alpha = \alpha(t_\theta t_\theta^\theta \cdots t_\theta^{\theta^{m-1}}) \cdot \theta^{*m} X_\alpha = S_{I\alpha}(t_\theta) \cdot c \cdot X_\alpha,$$

wobei $c = 1$ außer falls α vom Typ III ist, denn dann bewirkt θ^m den nichttrivialen Automorphismus (Flip) auf der irreduziblen Komponente (vom Typ A_{2n}), in der α liegt, so daß $c = -1$ (nach Lemma 2.9).

Zu (b): Man kombiniert Behauptung 2.15 und Lemma 2.17. Für die Fixwurzeln ($\Rightarrow S_{I\alpha} = \alpha$) vom Typ I oder II ist alles klar. Die Fälle, in denen I^* zyklisch ist, sind nach a) leicht zu verifizieren. Bleibt der

Fall: $\Phi = {}^6D_4$ und $\#I_\alpha = 3$: Sei $I = \langle \theta_3 \rangle \rtimes \langle \theta_2 \rangle$, $I_\alpha = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ und o.E. γ_1 die θ_2 -fixierte Wurzel in I_α . Die Hochschild–Serre–Spektralsequenz ergibt

$$1 \rightarrow H^1(\langle \theta_2 \rangle, \underbrace{(\prod_{\gamma \in I_\alpha} F^\times)^{\theta_3}}_{\simeq F^\times}) \rightarrow H^1(I^*, \prod_{\gamma \in I_\alpha} F^\times) \rightarrow H^1(\langle \theta_3 \rangle, \underbrace{\prod_{\gamma \in I_\alpha} F^\times}_{=1 \text{ nach Shapiro}})^{\theta_2} \rightarrow \dots,$$

wobei $H^1(\langle \theta_2 \rangle, F^\times) = \text{Hom}(\langle \theta_2 \rangle, F^\times) = \mathbb{Z}/2$ gegeben ist durch $\theta_2^i \mapsto \gamma_1(t_{\theta_2^i})$. Nach Voraussetzung $I \simeq I^*$ ist $1 = \gamma_2(t_{\theta_2^2}) = \gamma_2(t_{\theta_2} t_{\theta_2}^{\theta_2}) \stackrel{\gamma_3 = \theta_2 \gamma_2}{=} \gamma_2(t_{\theta_2}) \cdot \gamma_3(t_{\theta_2})$. Daher ist $\mathfrak{g}_{I\gamma_1} \neq 0 \Leftrightarrow \gamma_1(t_{\theta_2}) = 1 \Leftrightarrow S_{I\gamma_1}(t_{\theta_2^2}) = \gamma_1(t_{\theta_2}) \cdot \gamma_2(t_{\theta_2}) \cdot \gamma_3(t_{\theta_2}) = 1$. \square

3. Schritt: Das Wurzeldatum $\Psi(G^{I^\circ}, T^{I^\circ})$ von G^{I° bzw. \mathfrak{g}^I .

Hier werden die Ergebnisse aus den Schritten 1 und 2 (noch einmal) etwas formaler zusammengefaßt. Der Isomorphietyp einer reduktiven Gruppe H (über \bar{F}) wird festgelegt durch sein Wurzeldatum $\Psi(H, T) = (X^*(T), \Phi, X_*(T), \Phi^\vee)$, wobei T ein maximaler Torus von H ist.

Weil G^{I° reduktiv ist, folgt aus der Zerlegung (iii) auf Seite 17, daß die $\alpha_{res} \stackrel{\text{Def}}{=} \alpha|_{T^I}$, deren Orbits $I\alpha$ in (iii) vorkommen, ein Wurzelsystem in $X^*(T^{I^\circ})$ bilden, welches ein Subsystem ist von (Bezeichnung nach [KS99, (1.3)])

$$\Phi_{\text{res}} = \Phi_{\text{res}}(G, T, I) = \{\alpha_{\text{res}} := \alpha|_{T^{I^\circ}} \mid \alpha \in \Phi(G, T)\}.$$

Dies ist ein (nicht immer reduziertes)Wurzelsystem in $V^*/(1-I)V^* = V^*/\text{Kern}(P_I)$, das vermöge P_I mit $P_I(\Phi) = \Phi_I$ (aus Definition 2.6) identifiziert werden kann. Wegen $T^{I^\circ} \hookrightarrow T$ hat man $X_*(T^{I^\circ}) = X_*(T)^I \hookrightarrow X_*(T)$. Daher kann man ein zu $\Phi_{\text{res}} = P_I(\Phi)$ duales Wurzelsystem

$$\Phi^\vee(G, T, I) \hookrightarrow X_*(T)^I \cap \mathbb{Z}[\Phi^\vee(G, T)]$$

wie folgt definieren: $\beta^\vee \in X_*(T)^I \cap \mathbb{Z}[\Phi^\vee(G, T)]$ sei genau dann die duale Wurzel zu $\alpha|_{T^I} \in P_I(\Phi)$, wenn folgende äquivalente Bedingungen erfüllt sind:

- Für alle $\gamma \in \Phi(G, T)$ gilt

$$x^{\langle \gamma, \beta^\vee \rangle} = (\gamma \circ \beta^\vee)(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{G}_m,$$

d.h. (memotechnisch verkürzt) $\langle \gamma, \beta^\vee \rangle_T = \langle \gamma_{\text{res}}, \beta^\vee \rangle_{T^{I^\circ}}$ für alle $\gamma \in \Phi$.

$$\bullet \beta^\vee = \left\{ \begin{array}{ll} S_{I\alpha^\vee} & \text{falls } \alpha \text{ (bzw. } \alpha^\vee) \text{ nicht vom Typ II ist} \\ 2 \cdot S_{I\alpha^\vee} & \text{falls } \alpha \text{ (bzw. } \alpha^\vee) \text{ vom Typ II ist} \end{array} \right\} \stackrel{(2.5.8)}{=} (P_I\alpha)^\vee$$

Die Existenz von $\Phi^\vee(G, T, I)$ und die Äquivalenz der Definitionen überlegt man sich leicht in den irreduziblen Fällen mit $I \simeq I^*$. Nach der letzten Charakterisierung hat man $(\Phi^\vee)^I = \Phi^\vee(G, T, I)$. Mit diesen Definitionen besteht $\Psi(G^{I^\circ}, T^{I^\circ})$ aus folgenden Daten:

$$\begin{aligned} X^*(T^{I^\circ}) &= P_I(X^*(T)), \\ \Phi(G^{I^\circ}, T^{I^\circ}) &= \{P_I(\alpha) \mid \alpha \in \Phi(G, T) \text{ mit } \mathfrak{g}_{I\alpha} \neq 0\} \subset \Phi_{\text{res}} = \Phi(G, T)_I, \\ X_*(T^{I^\circ}) &= X_*(T)^I, \\ \Phi^\vee(G^{I^\circ}, T^{I^\circ}) &= \{P_I(\alpha)^\vee \mid \alpha \in \Phi(G, T) \text{ mit } \mathfrak{g}_{I\alpha} \neq 0\} \subset (\Phi^\vee(G, T))^I. \end{aligned}$$

Beispiel 2.19. Nochmal $\Phi = {}^2A_{2n}$: Sei $G = \text{Sl}(2n+1, F)$ und $I = \langle \theta \rangle$ zyklisch. Bezeichne $J := ((-1)^i \cdot \delta_{i, 2n+2-j})_{i,j} \in \text{GL}(2n+1)$ und für $k \neq l$ sei $E_{k,l} = (\delta_{i,k} \cdot \delta_{j,l})_{i,j} \in \mathfrak{sl}(2n+1) \subset \text{Mat}(2n+1 \times 2n+1)$. Das Splitting \mathbf{spl}_G soll bestehen aus dem Torus T der Diagonalmatrizen, den oberen Dreiecksmatrizen B und $\{X_{\alpha_i} := E_{i, i+1}\}_{\alpha_i \in \Delta}$. Dann ist $\theta^*(g) = J \cdot ({}^t g^{-1}) \cdot J^{-1}$ der nichttriviale äußere Automorphismus in $\text{Aut}(G, \mathbf{spl}_G)$. Der Fixtorus ist $T^\theta = \{\text{Diag}(x_1, \dots, x_n, 1, x_n^{-1}, \dots, x_1^{-1})\}$. Unter den Fixgruppen $G^{\text{int}t\theta^*}$ gibt es zwei Isomorphietypen, deren Weylgruppe gleich W^{θ^*} (d.h. maximal) ist, nämlich

θ	θ stabilisiert ein Splitting o.E. $\theta = \theta^*$	θ stabilisiert kein Splitting z.B. $t = \text{Diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_{n+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_n)$
G^θ	$\text{SO}(2n+1) =$	$\text{Sp}(2n) =$
$\Phi(G^\theta)$	$\{g \in \text{Sl}(2n+1) \mid {}^t g J g = J\}$	$\{g \in \text{Sl}(2n+1) \mid {}^t g J t g = J t\}$
$\Delta(G^\theta, T^\theta)$	$\Phi(B_n)$	$\Phi(C_n)$
$\Delta^\vee(G^\theta, T^\theta)$	$\alpha_1 _{T^I}, \dots, \alpha_n _{T^I}$	$\alpha_1 _{T^I}, \dots, \alpha_{n-1} _{T^I}, (\alpha_n + \alpha_{n+1}) _{T^I}$
	$S_{I\alpha_1^\vee}, \dots, S_{I\alpha_{n-1}^\vee}, 2S_{I\alpha_n^\vee}$	$S_{I\alpha_1^\vee}, \dots, S_{I\alpha_n^\vee} = S_{I(\alpha_n^\vee + \alpha_{n+1}^\vee)}$

Beispielrechnung für das Verhalten der Kowurzeln vom Typ II und III: Betrachte $\alpha_n^\vee \in X_*(T) = \text{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$. Man hat $S_{I\alpha_n^\vee} : x \mapsto \text{Diag}(1, \dots, 1, x, 1, x^{-1}, 1, \dots) \in T^I$, wobei x an der n -ten Stelle steht. Daher ist $(P_I(\alpha_n) \circ S_{I\alpha_n^\vee})(x) = \alpha_n(S_{I\alpha_n^\vee}(x)) = x^1$ und $(P_I(\alpha_n + \alpha_{n+1}) \circ S_{I\alpha_n^\vee})(x) = x^2$. Deshalb ist $S_{I\alpha_n^\vee} \in \Phi^\vee(\text{Sp}(2n))$ aber nicht in $\Phi^\vee(\text{SO}(2n+1))$.

4. Schritt: Beschreibung der Gruppe $\pi_0(G^I)$ der Zusammenhangskomponenten

Man reduziert zuerst (z.B. mit der Bruhatzerlegung) auf $N(T)$:

$$\pi_0(G^I) \simeq N(T)^I / (N(T)^I \cap G^{I^\circ}).$$

Diesen Quotienten kann man zerlegen in einen Anteil, der vom Zentrum von G herkommt, und einen, der sich in Termen der Weylgruppe ausdrückt, nämlich

$$1 \rightarrow T^I / T^{I^\circ} \rightarrow N(T)^I / (N(T)^I \cap G^{I^\circ}) \rightarrow \text{Kern}(\delta) / \text{Bild}[N(T)^I \cap G^{I^\circ} \rightarrow W^I] \rightarrow 1.$$

Dabei ist δ der Verbindungshomomorphismus in der langen exakten Sequenz

$$1 \rightarrow T^I \rightarrow N(T)^I \rightarrow W^I \xrightarrow{\delta} H^1(I, T) \rightarrow H^1(I, N(T)) \rightarrow \dots,$$

und den zentralen Anteil T^I / T^{I° extrahiert man, indem man $N(T)^I / (N(T)^I \cap G^{I^\circ})$ schreibt als Extension von $N(T)^I / (N(T)^I \cap G^{I^\circ}) \cdot T^I$ mit T^I / T^{I° und wieder die lange exakte Sequenz oben anwendet.

Im ersten Schritt ist T^I / T^{I° beschrieben worden, so daß jetzt nur noch die Gruppe $\text{Kern}(\delta) / \text{Bild}[N(T)^I \cap G^{I^\circ} \rightarrow W^I]$ zu beschreiben bleibt. Er läßt sich vollständig in der derivierten Gruppe berechnen. Aus Platzgründen werden im Folgenden die Definitionen aus Satz 2.12 verwendet:

$$W_2 := \text{Bild}[N(T)^I \rightarrow W^I] = \text{Kern} \left[W^I \xrightarrow{\delta} H^1(I, T) \right] \simeq N(T)^I / T^I$$

$$W_1 := \text{Bild}[N_{sc}(T_{sc})^I \rightarrow W^I] = \text{Kern} \left[W^I \xrightarrow{\delta_{sc}} H^1(I, T_{sc}) \right] \simeq N_{sc}(T_{sc})^I / T_{sc}^I$$

$$W_0 := \text{Bild}[N(T) \cap G^{I^\circ} \rightarrow W^I] = \text{Bild}[N_{sc}(T_{sc}) \cap G_{sc}^{I^\circ} \rightarrow W^I] = W(\mathfrak{g}^I)$$

Berechnet werden soll W_2 / W_0 . Betrachte dazu die Exponentialsequenz ($V = X_*(T) \otimes \mathbb{R}$)

$$1 \rightarrow X_*(T) \rightarrow V \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} T(\mathbb{C}) \rightarrow 1$$

und wähle für alle $\sigma \in I$ ein $Y_\sigma \in V \otimes \mathbb{C} =: V'$, so daß $\exp(Y_\sigma) = t_\sigma$ mit $\sigma = \text{int} t_\sigma \circ \sigma^*$. Ein t_σ ist dadurch modulo $\text{Cent}(G)$ eindeutig bestimmt und $\sigma \mapsto \text{int} t_\sigma$ ist ein 1-Kozykel von I mit Werten in T_{ad} . Analog ist Y_σ modulo $X_*(T)$ bestimmt und $(\sigma \mapsto Y_\sigma + X_*(T_{ad}))$ ist ein 1-Kozykel von I mit Werten in $V / X_*(T_{ad})$.

Wenn $t_{sc, \sigma} \in T_{sc}$ Elemente über $t_\sigma \in T$ sind, so ist $(\sigma \mapsto w(t_{sc, \sigma}) t_{sc, \sigma}^{-1} \in T_{sc})$ (bzw. $(\sigma \mapsto (w - 1)Y_\sigma + \mathbb{Z}[\Phi^\vee])$) ein Kozykel von I mit Werten in T_{sc} , denn $w(t_{sc, \sigma}) t_{sc, \sigma}^{-1}$ (bzw. $(w - 1)Y_\sigma \in V_{der}$) hängt offensichtlich nicht ab von der Wahl der Vertreter $t_{sc, \sigma}$ bzw. Y_σ für $t_\sigma \in T$.

Lemma 2.20. $\delta(w) \in H^1(I, T)$ ist die Klasse von $(\sigma \mapsto w(t_\sigma)t_\sigma^{-1})$.

Beweis: Man kann $\delta(w)$ wie folgt berechnen: Sei $n(w) \in N(T)$ der Steinbergrepräsentant von w . Dann ist $\delta(w)(\sigma) = n(w)\sigma(n(w))^{-1}$ modulo Koränder. Nach Lemma 2.7 gilt $\sigma^*(n(w)) = n(\sigma^*(w)) = n(w)$. Daher

$$n(w)\sigma(n(w))^{-1} = n(w)(\text{int}t_\sigma \circ \sigma^*)(n(w))^{-1} = n(w)t_\sigma n(w)^{-1}t_\sigma^{-1} = t_\sigma^w t_\sigma^{-1} \quad \square$$

Korollar 2.21. $w \in W_2 \stackrel{\text{Def}}{=} \text{Bild}[N(T)^I \rightarrow W^I] = \text{Kern}\left[W^I \xrightarrow{\delta} H^1(I, T)\right]$

\Leftrightarrow Es existiert ein $t \in T$, so daß $t_\sigma^w t_\sigma^{-1} = t^\sigma t^{-1}$ für alle $\sigma \in I$.

\Leftrightarrow Es gibt ein $Y \in V$, so daß $(w-1)Y_\sigma \equiv (\sigma-1)Y \pmod{X_*(T)}$ für alle $\sigma \in I$.

Behauptung 2.22.

$$W_2/W_1 \simeq \text{Bild}\left[W^I \rightarrow H^1(I, T_{sc} \times Z)\right] \cap \text{Bild}\left[H^1(I, \kappa(G)) \rightarrow H^1(I, T_{sc} \times Z)\right].$$

Beweis: Betrachte folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & H^2(I, \kappa(G)) & & & \\ & & & \uparrow & & & \\ \dots \rightarrow & N(T)^I & \longrightarrow & W^I & \xrightarrow{\delta} & H^1(I, T) & \longrightarrow & H^1(I, N(T)) & \rightarrow \dots \\ & \uparrow & & \parallel & & \uparrow \pi & & \uparrow & \\ \dots \rightarrow & N_{sc}(T_{sc})^I & \longrightarrow & W^I & \xrightarrow{\delta'_{sc}} & H^1(I, T_{sc} \times Z) & \longrightarrow & H^1(I, N_{sc}(T_{sc}) \times Z) & \rightarrow \dots \\ & & & \uparrow & & & & & \\ & & & H^1(I, \kappa(G)) & & & & & \end{array}$$

in das die langen exakten Sequenzen zu den Definitionen der Fundamentalgruppe $\kappa(G)$ und der Weylgruppe W eingehen. Dabei ist $\delta'_{sc} : W^I \xrightarrow{\delta_{sc}} H^1(I, T_{sc}) \hookrightarrow H^1(I, T_{sc}) \times H^1(I, Z) \simeq H^1(I, T_{sc} \times Z)$. Nun ist $W_2 = \text{Kern}(\pi \circ \delta'_{sc})$ und $W_1 = \text{Kern}\delta'_{sc}$. \square

(2.23) Um W_1 zu berechnen, reduziert man (besser) auf irreduzibles Φ . Es werden wieder die Bezeichnungen von oben benutzt: $\Phi = \bigoplus_i \text{Ind}_{I_i}^I \Phi_i$ und die entsprechenden Zerlegungen von T_{sc} , V , $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]$ und W . Weil folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & W(\Phi)^I & \xrightarrow{\delta_{sc}} & H^1(I, T_{sc}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \text{Shapiro} & & \\ \dots & \longrightarrow & \bigoplus_i W(\Phi_i)^{I_i} & \xrightarrow{\bigoplus_i \delta_i} & \bigoplus_i H^1(I_i, T_{i,sc}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

sei zur Berechnung von W_1 und W_0 o.E. Φ irreduzibel.

Behauptung 2.24. *Sei Φ irreduzibel. Dann sind folgende vier Gruppen gleich:*

- (1) $W_1 \stackrel{\text{Def}}{=} \text{Bild}[N_{sc}(T_{sc})^I \rightarrow W^I] = \text{Kern}[W^I \xrightarrow{\delta_{sc}} H^1(I, T_{sc})].$
- (2) $\{w \in W^I \mid \exists Y \in V \forall \sigma \in I : (w - 1)Y_\sigma \equiv (\sigma - 1)Y \pmod{\mathbb{Z}[\Phi^\vee]}\}.$
- (3) $\bigcap_{\sigma \in I} \text{Bild} \left[\left(P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I \right)_{P_I(Y_\sigma)} \xrightarrow{\text{Proj.}} W^I \right] \cap \bigcap_{t \in I \cap T_{ad}} W_t$
- (4) $\bigcap_{\sigma \in I} \left\langle s_{I\alpha} \mid \begin{array}{ll} S_{I\alpha}(Y_\sigma) \in \mathbb{Z}, & \text{falls } \alpha \text{ vom Typ I} \\ (2S_{I\alpha})(Y_\sigma) \in \mathbb{Z}, & \text{falls } \alpha \text{ vom Typ II} \end{array} \right\rangle \cap \bigcap_{t \in I \cap T_{ad}} W_t$

Beachte, daß aus der Bedingung $w \in \bigcap_{t \in I \cap T_{ad}} W_t$ folgt, daß in (3) gilt: $(w - 1)Y_\sigma \equiv (w - 1)Y_\tau \pmod{\mathbb{Z}[\Phi^\vee]}$, falls $\sigma^* = \tau^*$. Deswegen kann man den ersten Durchschnitt in (3) bzw. (4) auch nur über (die Erzeuger von) $\sigma^* \in I^*$ nehmen (und für jedes σ^* ein Y_σ wählen).

Beweis: (1) = (2) ist Korollar 2.21 für $X_*(T_{sc}) = \mathbb{Z}[\Phi^\vee]$.

(2) \subset (3): Aus $x(w, \sigma) := (w - 1)Y_\sigma \equiv (\sigma - 1)Y \pmod{\mathbb{Z}[\Phi^\vee]}$ für alle $\sigma \in I$ folgt zum einen sofort, daß für $\sigma \in I \cap T_{ad}$ gilt $(w - 1)Y_\sigma \in \mathbb{Z}[\Phi^\vee]$, d.h. $w(t_\sigma) = t_\sigma$. Zum anderen folgt durch Projektion auf V^I , daß $P_I(x(w, \sigma)) \in \mathbb{Z}[\Phi^\vee]$ und $P_I(Y_\sigma) \equiv w(P_I(Y_\sigma)) - P_I(x(w, \sigma)) \pmod{P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])}$ für alle $\sigma \in I$, d.h.

$$w \in \bigcap_{\sigma \in I} \text{Bild} \left[\left(P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I \right)_{P_I(Y_\sigma)} \rightarrow W^I \right].$$

(2) \supset (3): Sei nun $w \in W^I$ aus diesem Durchschnitt. Außerdem ist $w \in \bigcap_{t \in I \cap T_{ad}} W_t$, woraus folgt, daß $(w - 1)Y_\sigma \equiv (w - 1)Y_\tau \pmod{\mathbb{Z}[\Phi^\vee]}$ für $\sigma^* = \tau^*$. Daher ist die Kohomologieklassse von $(\sigma^* \mapsto (w - 1)P_I(Y_\sigma))$ in $H^1(I^*, V^I/P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]))$ wohldefiniert und trivial. Man ist nun in der Situation von (2.10) und hat die exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \underbrace{H^1(I^*, V_P/(\mathbb{Z}[\Phi^\vee] \cap V_P))}_{=0 \text{ nach Lemma 2.11}} \rightarrow H^1(I^*, V'/\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \xrightarrow{\overline{P}_I} H^1(I^*, V^I/P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])) \rightarrow \dots,$$

d.h. nach Lemma 2.11 ist \overline{P}_I eine Inklusion. Deswegen ist $(\sigma^* \mapsto (w - 1)Y_\sigma)$ trivial in $H^1(I^*, V'/\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$. Also liegt w in der Gruppe von (2).

(3) = (4): Erstens operiert nach (2.5.9) $P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I$ als affine Weylgruppe (zu W^I) auf V^I und zwar erzeugt von den Spiegelungen ($\in \text{End} V^I$) an den Hyperebenen $H_{I\alpha, k} := \{v \in V^I \mid (P_I\alpha^\vee)^\vee(v) = -k\}$ (für $k \in \mathbb{Z}$). Zweitens ist nach dem Satz von Chavalley–Steinberg 1.6 das Bild eines Stabilisators $(P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I)_v$ unter der Projektion in W^I eine Spiegelungsuntergruppe, die erzeugt wird von den Spiegelungen $s_{I\alpha}$ (an $H_{I\alpha, 0}$), für die $v \in H_{I\alpha, k}$ mit geeignetem $k \in \mathbb{Z}$. Schließlich hat man nach (2.5.8)

$$(P_I\alpha^\vee)^\vee(P_I(Y_\sigma)) = c(\alpha) \cdot S_{I\alpha}(P_I(Y_\sigma)) = c(\alpha) \cdot S_{I\alpha}(Y_\sigma),$$

wobei das c aus Definition 2.3 benützt wird. (Daß Wurzeln vom Typ III in diesen Überlegungen nicht (explizit) auftauchen, liegt an einer Bemerkung in (2.5.9): Wenn $\alpha = \alpha' + \theta(\alpha')$ vom Typ III ist und α' vom Typ II, dann gilt $H_{\alpha,k} = H_{\alpha',2k}$.) \square

(2.25) Für irreduzibles Φ folgt aus Beispiel 2.18 eine zu Behauptung 2.24(4) ähnliche Charakterisierung von $W_0 = W(\mathfrak{g}^I)$:

$$W_0 = \left\langle s_{I\alpha} \mid \forall \sigma \in I : \begin{cases} S_{I\alpha}(Y_\sigma) \in \mathbb{Z}, & \text{falls } \alpha \text{ vom Typ I} \\ (2S_{I\alpha})(Y_\sigma) \in \mathbb{Z}, & \text{falls } \alpha \text{ vom Typ II} \end{cases} \right\rangle \cap \bigcap_{t \in I \cap T_{ad}} W_t$$

Damit ist der (verallgemeinerte) Satz von Steinberg 2.12 bewiesen.

Satz von Steinberg mit zyklischer Automorphismengruppe

(2.26) Hier wird V^I wieder als Kammerkomplex bezüglich der Aktion von $W_{aff} := P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I$ aus (2.5.9) angesehen. Fixiere eine Kammer C und definiere

$$\Omega^C(G) := \text{Stab}_C(P_I(X_*(T)) \rtimes W^I) \simeq \left(P_I(X_*(T)) \rtimes W^I \right) / \left(P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I \right),$$

wobei T ein maximaler Torus in G ist. Die mittlere Gleichung folgt, weil W_{aff} einfach transitiv auf den Kammern von V^I operiert.

Satz 2.27 (Steinberg [St68, 8.1], Burgoyne, Williamson [BW72, Prop. F] und Hales [Hal93, 4.7]).

Sei $I = \langle \theta \rangle$ zyklisch mit $\theta = \text{intt}_\theta \circ \theta^*$ und $t_\theta = \exp Y_\theta \in T$. Dann gilt

$$\Phi(G^{\theta^\circ}, T^{\theta^\circ}) = \left\{ P_I(\alpha) \in P_I(\Phi) \mid S_{I\alpha}(t_\theta) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha \text{ vom Typ I oder II} \\ -1 & \text{falls } \alpha \text{ vom Typ III} \end{cases} \right\}$$

Die unipotente Untergruppe $U_{I\alpha}$ zur Wurzel $P_I(\alpha) \in \Phi(G^{\theta^\circ}, T^{\theta^\circ})$ ist als Varietät isomorph zum Bild von U_α in $\prod_{\sigma \in I/I_\alpha} \sigma U_\alpha$ unter $x \mapsto \prod_{\sigma \in I/I_\alpha} \sigma(x)$ (in irgendeiner festgelegten Reihenfolge des Produkts).

Wie in (2.26) fixiere eine Kammer C von V^I , in deren Abschluß $P_I(Y_\theta)$ liegt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} W(\mathfrak{g}^I) &\simeq \left(P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I \right)_{P_I(Y_\theta)} \stackrel{\text{Def}}{=} W_0 \\ N(T)^I / T^I &\simeq \left(P_I(X_*(T)) \rtimes W^I \right)_{P_I(Y_\theta)} \stackrel{\text{Def}}{=} W_2 \\ 1 \rightarrow W_0 &\rightarrow W_2 \rightarrow \left(\Omega^C(G) \right)_{P_I(Y_\theta)} \rightarrow 1 \quad \text{ist splitexakt.} \\ 1 \rightarrow T^I / T^{I^\circ} &\rightarrow G^I / G^{I^\circ} \rightarrow W_2 / W_0 \rightarrow 1 \quad \text{ist exakt.} \\ 1 \rightarrow Z^I / (Z \cap T^{I^\circ}) &\rightarrow T^I / T^{I^\circ} \rightarrow H^1(I^*, \kappa(G)) \rightarrow H^1(\langle \theta^* \rangle, T_{sc} \times Z) \quad \text{ist exakt,} \end{aligned}$$

wobei $Z = \text{Cent}(G)^\circ$ und $\kappa(G) = \text{Kern}[T_{sc} \times Z \twoheadrightarrow T]$.

Insbesondere ist G^θ eine zusammenhängende reduktive Gruppe, wenn G halbeinfach und einfach zusammenhängend ist.

Beweis: Die Beschreibung von $\Phi(G^{\theta^\circ}, T^{\theta^\circ})$ ist aus Beispiel 2.18.a. Die Aussagen über W_0 und W_2 sind am einfachsten direkt aus Korollar 2.21 abzuleiten: Für $w \in W^I$ gilt

$$\begin{aligned} w \in \text{Bild}[N(T)^I \rightarrow W^I] &= \text{Kern}\left[W^I \xrightarrow{\delta} H^1(I, T)\right] \\ &\Leftrightarrow (w - 1)P_I(Y_\theta) \in P_I(X_*(T)) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in P_I(X_*(T)) \text{ mit } w(P_I(Y_\theta)) + x = P_I(Y_\theta) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in P_I(X_*(T)) \text{ mit } x \rtimes w \in \left(P_I(X_*(T)) \rtimes W^I\right)_{P_I(Y_\theta)} \end{aligned}$$

Das wendet man für T_{sc} (d.h. $X_*(T_{sc}) = \mathbb{Z}[\Phi^\vee]$) und T selbst an, um sich Beschreibungen von W_1 und W_2 zu verschaffen. Für zyklisches I hat man $W_0 = W_1$. Das kann man z.B. durch Vergleich von (2.25) und Behauptung 2.24.4 sehen, wenn man den Durchschnitt in 2.24.4 nur über den einen Erzeuger θ von I laufen läßt (was in Behauptung 2.24 ausdrücklich erlaubt wird).

Nun kann man alle Aussagen aus Satz 2.12 ablesen, außer dem Schnitt der Sequenz $W_1 \hookrightarrow W_2 \twoheadrightarrow W_2/W_0$. Mit dem Satz von Chevalley–Steinberg 1.6 kan man beweisen, daß W_0 transitiv auf den Kammern operiert, in deren Abschluß $P_I(Y_\theta)$ liegt. Daher nimmt diese exakte Sequenz (wie in (2.26)) folgende Splitform an:

$$1 \rightarrow \left(P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I\right)_{P_I(Y_\theta)} \rightarrow \left(P_I(X_*(T)) \rtimes W^I\right)_{P_I(Y_\theta)} \rightarrow \left(\Omega^C(G)\right)_{P_I(Y_\theta)} \rightarrow 1$$

□

Der Kammerkomplex zu $P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I$

Sei weiterhin $I = \langle \theta \rangle$ zyklisch. In diesem Paragraphen wird Φ fast immer irreduzibel angenommen, um die Bezeichnungen zu vereinfachen. Wie man das hier Dargestellte auf allgemeines $\Phi \subset V$ ausdehnen kann, deutet die allgemeine Definition des affinen Dynkindiagramms 2.33 an. Die Funktion $c(\alpha)$ ist stets die aus Definition 2.3.

(2.28) Leitfaden: Hauptsächlich der Satz 2.42 von Dynkin im nächsten Paragraphen erfordert ein präzises Studium der verschiedenen Wurzelsysteme, die aus einem gegebenen Φ durch Kombination von P_I , S_I und $(\cdot)^\vee$ entstehen. Als Orientierungshilfe werden hier die erweiterten Basen der (nützlichen) Systeme vorgestellt und angedeutet, wozu man sie (später) braucht. Dabei ist eine (I -stabile) Basis Δ von Φ vorgegeben und $I\tilde{\alpha} \subset \Phi^-$ ist ein Orbit, der in Definition 2.33 definiert wird.

$$\{P_I(\alpha)^\vee \mid \alpha \in \Delta\} \cup \{S_{I\tilde{\alpha}^\vee}\}$$

Wird zur Berechnung der Fundamentalgruppen von Subsystemen in 2.43 benützt.

$$\{P_I(\alpha^\vee) \mid \alpha \in \Delta\} \cup \{P_I(\tilde{\alpha}^\vee)\}$$

Enthält eine Basis des Translationsgitters der affinen Gruppe $P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I$. Dieses Gitter ist der Kern der Exponentialabbildung von T_{sc} .

$$\{P_I(\alpha) \mid \alpha \in \Delta\} \cup \{(S_{I\tilde{\alpha}^\vee})^\vee\}$$

Charakterisiert die Subwurzelsysteme von Zentralisatoren nach Dynkin (Satz 2.42).

$$\{(P_I(\alpha^\vee))^\vee \mid \alpha \in \Delta\} \cup \{P_I(\tilde{\alpha}^\vee)^\vee\}$$

Durch sie werden die Wände eines Fundamentalbereichs "Alkoven" der Operation von $P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I$ auf V^I definiert. $H_{I\tilde{\alpha},1}$ ist der "Alkovendeckel".

Dabei sind die zueinander dualen Systeme/Basen untereinander angeordnet. Um die I -Orbiten von $\Delta \cup I\tilde{\alpha}$ eindeutig zu bezeichnen, genügt es, eine dieser vier erweiterten Basen als $\Delta_{ext}(\Phi, I)$ zu benennen. Wegen des Satzes 2.42 wird dies die Menge links unten sein.

Für irreduzible Wurzelsysteme Φ ohne Twist ($\theta = id$), die nicht vom Typ B oder C sind, sind alle vier abgeleiteten Wurzelsysteme/erweiterten Basen vom selben Typ (wie Φ). Für Wurzelsysteme Φ vom Typ B oder C sind nur die Wurzelsysteme in einer Zeile gleich. (Die andere Zeile beinhaltet das duale System.) Falls $\theta \neq id$ und Φ nicht vom Typ A_{2n} sind die Wurzelsysteme/erweiterten Basen diagonal über Kreuz vom selben Typ (wegen (2.5.8) und der Selbstdualität der ADE-Systeme). Sie liegen allerdings in zueinander dualen Vektorräumen. Im Fall A_{2n} hat man vier verschiedene erweiterte Basen:

Beispiel 2.29. Der Ausnahmefall A_{2n} :

Hier ergeben sich folgende Diagramme zu "erweiterten Basen" von BC -Wurzelsystemen:

$$\bullet \Leftarrow \circ \text{---} \circ \cdots \circ \text{---} \circ \Leftarrow \circ$$

$$\bullet \Leftarrow \circ \text{---} \circ \cdots \circ \text{---} \circ \Rightarrow \circ$$

$$\bullet \Rightarrow \circ \text{---} \circ \cdots \circ \text{---} \circ \Rightarrow \circ$$

$$\bullet \Rightarrow \circ \text{---} \circ \cdots \circ \text{---} \circ \Leftarrow \circ$$

(2.30) Der Kammerkomplex: Bisher wurde von dem Kammerkomplex, der von $P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I$ auf V^I bewirkt wird, nur benutzt, was in (2.5.9) steht: $\mathbb{Z}[P_I(\Phi^\vee)] \rtimes W^I$ operiert auf V^I als affine Weylgruppe zu W^I , erzeugt von den Spiegelungen an den Hyperebenen

$$(iv) \quad H_{I\alpha,k} := \{v \in V^I \mid (P_I\alpha^\vee)^\vee(v) = -k\} = \{v \in V^I \mid (c(\alpha) \cdot S_{I\alpha})(v) = -k\}$$

(für $k \in \mathbb{Z}$). Genauer heißt das: Die Kammern von V^I sind die Zusammenhangskomponenten von

$$V^I \setminus \bigcup_{\substack{I\alpha \subset \Phi, \\ k \in \mathbb{Z}}} H_{I\alpha,k}$$

und die Aktion von $\mathbb{Z}[P_I(\Phi^\vee)] \rtimes W^I$ ist einfach transitiv auf den Kammern, denn die Hyperebenen $H_{I\alpha,k}$ sind (nach (iv)) die Nullstellenmengen zu Wurzeln des affinen Wurzelsystems $(P_I(\Phi^\vee)^\vee)_{aff} := \{\beta + k \mid \beta \in P_I(\Phi^\vee)^\vee, k \in \mathbb{Z}\}$ und $(P_I(\Phi^\vee))_{aff} := \{\beta + k \mid \beta \in P_I(\Phi^\vee), k \in \mathbb{Z}\}$ ist das duale Wurzelsystem dazu. ("Dual" heißt hier bezüglich der üblichen Erweiterung der Paarung von $\Phi^I \times (\Phi^I)^\vee$ durch die Definition $\langle \alpha + k, \beta^\vee + l \rangle := \langle \alpha, \beta^\vee \rangle$.)

(2.31) Der Kammerkomplex auf $(V \otimes \mathbb{C})^I$: Um den Kammerkomplex auf die I -Invarianten des komplexifizierten Vektorraum $V' := V \otimes \mathbb{C} = V \oplus i \cdot V$ auszudehnen, sei

$$H_{I\alpha,k}^{\text{Re}} := \{v \in V^I \otimes \mathbb{C} \mid \text{Re}(v) \in H_{I\alpha,k}\},$$

wobei der Realteil (wie üblich) die Projektion auf die erste Komponente in $V' = V \oplus i \cdot V$ ist. Die (nicht kompakten) Kammern von V'^I sind dann wieder definiert als die Zusammenhangskomponenten von $V'^I \setminus \bigcup H_{I\alpha,k}^{\text{Re}}$ und die affine Weylgruppe operiert durch $(x \rtimes w)(v_1 + iv_2) := x + w(v_1) + i \cdot w(v_2)$ für $v_i \in V^I$, $w \in W^I$ und $x \in P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$. Diese Operation ist also auf dem Realteil von V'^I die obige affine Operation und auf dem Imaginärteil die spärliche Operation der Projektion auf den Faktor W^I . Daher operiert auch $P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I$ transitiv auf den Kammern von V'^I und die Operation wird erzeugt von Involuntionen $s_{I\alpha,k} \times s_{I\alpha,0} \in \text{AffEnd}(V^I) \times \text{End}(iV^I)$, die von den Wänden einer reellen Kammer $C \subset V^I$ induziert werden.

Die Operation von $\mathbb{Z}[\Phi^\vee] \rtimes W$ auf V' wurde (per Konstruktion) so eingerichtet, daß die Exponentialabbildung

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}[\Phi^\vee] \longrightarrow V \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} T(\mathbb{C}) \longrightarrow 1$$

W -äquivariant ist und das Bild des Abschlusses einer Kammer ein Fundamentalbereich für $T(\mathbb{C})/W$ ist.

Für ein Element $t = \exp(y) \in T(\mathbb{C})$ und eine Wurzel $\alpha \in X^*(T)$ ist dann $\alpha(t) = 1$ äquivalent zu: $\alpha(\text{Re}(y)) \in \mathbb{Z}$ und $\alpha(\text{Im}(y)) = 0$, was gleichbedeutend ist mit $\alpha(y) \in \mathbb{Z}$.

(2.32) Der Alkoven: Die Wände einer Kammer von V^I (aus (2.30)) korrespondieren über die Operation von $\mathbb{Z}[P_I(\Phi^\vee)] \rtimes W^I$ eindeutig zu Wänden einer irgendwie festgelegten Kammer C_0 ("Alkoven"), in deren Abschluß o.E. 0 liegen soll. Der Kegel $\mathbb{R} \cdot C_0$ (oder ein Punkt im Inneren von C_0) definiert eindeutig eine Basis des (spärlichen) Wurzelsystems $(P_I(\Phi^\vee))^\vee$ und damit (nach (2.5.3)) auch (I -stabile) Basen in allen verwandten Systemen: Φ , Φ^\vee , $P_I(\Phi^\vee)$, $P_I(\Phi)$

Die Wände des Alkovens C_0 sind nun zum einen die Wände $H_{I\alpha,0}$, für $\alpha \in \Delta$, von $\mathbb{R} \cdot C_0$ (sie enthalten 0!) und zudem für jeden θ -Orbit einer irreduziblen Komponente von Φ_i eine Zusatzwand ("Deckel") $H_{I\tilde{\alpha}_i,1}$, wobei $\tilde{\alpha}_i \in \Phi$, so daß $-(P_I(\tilde{\alpha}_i^\vee))^\vee$ die höchste Wurzel in $P_I(\Phi_i^\vee)^\vee$ (bzgl. $P_I(\Delta_i^\vee)^\vee$) ist. Man kann diese Zusatzwand als Deckel bezeichnen, denn sie trennt von $\mathbb{R} \cdot C_0 \cap (\mathbb{Z}[\Phi_i^\vee] \otimes)$ eine kompakte Kammer ab, in der 0 liegt.

Für irreduzible Wurzelsysteme wird der Alkoven in (2.40) unten angegeben. Vorher müssen aber noch die Wurzeln genauer benannt werden. Im Lichte von Satz 2.42 ist folgende Vorgehensweise sinnvoll:

Definition 2.33. *Sei Φ irreduzibel, $\theta \in \text{Aut}(\Phi, \Delta)$ und $\tilde{\alpha} \in \Phi^-$, so daß folgende äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:*

- $-P_I(\tilde{\alpha}^\vee)^\vee = -c(\tilde{\alpha})S_{I\tilde{\alpha}}$ ist die höchste Wurzel in $(P_I(\Phi^\vee)^\vee)^+ = (\Phi^I)^+$, bezüglich des Positivbereiches der durch Δ definiert wird.
- $H_{I\tilde{\alpha},1}$ ist der "Deckel" des Alkovens, der 0 enthält und dessen restliche Wände $H_{I\alpha,0}$ für alle $\alpha \in \Delta$ sind.

Dem Paar (Φ, θ) werde das affine Dynkindiagramm bzw. die erweiterte Basis

$$\begin{aligned} \Delta_{aff}(\Phi, \theta) &:= P_I(\Delta) \cup \{c(\tilde{\alpha})P_I(\tilde{\alpha}) + 1\} \\ &\stackrel{(2.5.8)}{=} \left\{ \frac{1}{c(\alpha)}(S_{I\alpha^\vee})^\vee \mid I\alpha \subset \Delta \right\} \cup \{(S_{I\tilde{\alpha}^\vee})^\vee + 1\} \\ \text{bzw. } \Delta_{ext}(\Phi, \theta) &:= P_I(\Delta) \cup \{c(\tilde{\alpha})P_I(\tilde{\alpha})\} \end{aligned}$$

zugeordnet. Alle Dynkingraphen zu $\Delta_{aff}(\Phi, \theta)$ sind in Tabelle 2.36 angegeben.

Falls Φ reduzibel ist, benutzt man die Notation vom Ende des Satzes 2.12 für $I = \langle \theta \rangle$ zu folgender Definition

$$\Delta_{aff} \left(\bigoplus_i \text{Ind}_{I_i}^I \Phi_i, I \right) = \coprod_i \Delta_{aff}(\Phi_i, I_i).$$

(2.34) Wenn man die Wurzel der irreduziblen ADE-Systeme so numeriert, wie auf Seite 151 (das ist die Bourbakinotation [Bou, VI §4]), hat man folgende Orbits $I\tilde{\alpha}$ (falls $\theta \neq id$)

$$\begin{aligned} {}^2A_{2n-1} &: \{-(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2n-2}), -(\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n-1})\} \\ {}^2A_{2n} &: \{-(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n), -(\alpha_{n+1} + \dots + \alpha_{2n})\} \\ {}^2D_n &: \{-(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}), -(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-2} + \alpha_n)\} \\ {}^2E_6 &: \{-(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6), -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6)\} \\ {}^3D_4 &: \{-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), -(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4), -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)\} \end{aligned}$$

Bei diesen Fällen (außer den ${}^2A_{2n}$ -Systemen) ist $-I\tilde{\alpha}$ immer der Orbit höchster Höhe in Φ^+ , der nicht aus einer Fixwurzel besteht. Im Ausnahmefall $\Phi = A_{2n}$ und $\theta \neq id$ ist $\tilde{\alpha}$ vom Typ II ($\Rightarrow c(\tilde{\alpha}) = 2!$). Falls $\theta = id$, ist $-\tilde{\alpha}$ immer die höchste Wurzel in Φ^+ .

(2.35) **Zur Tabelle:** Nur Wurzelsysteme Φ vom Typ ADE gestatten nichttriviale Automorphismen. In der Tabelle werden die Diagramme zu $\Phi_I = P_I(\Phi)$ (bzw. zu $\Delta_{aff}(\Phi_I, id)$) immer direkt unter den entsprechenden Systemen Φ angeordnet (getrennt nur durch einen Strich), wenn Φ_I ein reduziertes Wurzelsystem ist, d.h. als Wurzelsystem einer reduktiven Gruppe vorkommt. Das ist genau dann der Fall,

wenn Φ nicht vom Typ A_{2n} ist (vgl. (2.5.1)).

Der geschwärzte Punkt gibt jeweils die Wurzel an, die nicht in $P_I(\Delta(G, T))$ liegt, die also zum "Deckel" der Kammer gehört. Die Anzahl der nicht geschwärzten Punkte geht aus der Bezeichnung des Wurzelsystems hervor: A_m hat m weiße Punkte usw. Die Wurzelsysteme mit Mehrfachkanten haben immer genau so viele weiße Punkte wie die Anzahl der θ -Orbiten von weißen Punkten im ADE-System links neben bzw. über dem betrachteten Wurzelsystem. Deswegen werden in den ADE-Systemen die weißen Punkte eines θ -Orbits untereinander gezeichnet. (Daher gibt es das Diagramm zu $\Delta_{aff}(\Phi(D_4), id)$ zweimal: Einmal werden die 3 (weißen) Orbiten unter einem Automorphismus der Ordnung 2 dargestellt, das andere Mal die beiden (weißen) Orbiten unter einem Automorphismus der Ordnung 3.)

Tabelle 2.36. $\Delta_{aff}(\Phi, \theta)$

Φ	$\theta = id$	$\text{Ord}(\theta) = 2$
A_{2n-1} $n \geq 2$		
C_n $n \geq 2$		
A_{2n}		
D_{n+1} $n \geq 4$		
B_n $n \geq 3$		
Nur $\theta = id$ möglich:		
E_8		
E_7		
	$\theta = id$	$\text{Ord}(\theta) = 2$
E_6		
F_4		
	$\theta = id$	$\text{Ord}(\theta) = 3$
D_4		
G_2		

Definition 2.37. Ein Punkt $v \in V^I$ heißt *speziell*, falls

$$\left(P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I \right)_v \simeq W^I.$$

Wenn Φ irreduzibel ist, liegt ein spezielles v in einer Facette niedrigster Dimension einer Kammer und die Wurzel der gegenüberliegenden Wand in $\Delta_{aff}(\Phi, \theta)$ wird ebenfalls speziell genannt.

(2.38) Nach dem Satz von Chevalley–Steinberg 1.6 kann man die speziellen Ecken am Graphen von $\Delta_{aff}(\Phi, \theta)$ ablesen (o.E. sei Φ irreduzibel): Eine Ecke ist genau dann speziell, wenn die Weylgruppe von $P_\theta(\Phi)$ gleich der Weylgruppe des Graphen ist, der entsteht, wenn man die Ecke (mit allen zu ihr führenden Kanten) aus dem Diagramm zu $\Delta_{aff}(\Phi, \theta)$ streicht. In der Tabelle 2.36 sind die speziellen Punkte genau die Punkte im Orbit des geschwärzten Punktes unter den Diagrammautomorphismen, außer im Fall $\Phi = A_{2n}$, $\theta \neq id$. Dann sind beide Randpunkte speziell, aber es gibt keine Diagrammautomorphismen. Auf Seite 152 sind genau alle speziellen Punkte geschwärzt.

Behauptung 2.39. Genau dann ist $v \in V^I$ speziell, wenn

$$v \in \mathbb{Z}[(P_I(\Delta^\vee))^\vee]^* \stackrel{Def}{=} \{x \in V^I \mid \gamma(v) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } \gamma \in P_I(\Delta^\vee)^\vee\} = \mathbb{Z}[\Phi^{I, lang}]^*,$$

wobei $\Phi^{I, lang}$ das reduzierte Wurzelsystem der längsten Wurzeln in $\Phi^I = P_I(\Phi^\vee)^\vee$ ist (d.h. man läßt alle $P_I(\alpha^\vee)^\vee$ weg, für die α vom Typ III ist).

Beweis: Man reduziert sofort auf irreduzibles Φ . Nach Chevalley–Steinberg 1.6 und der Inspektion in (2.38) ist $v \in V^I$ genau dann speziell, wenn es zu jedem Orbit $I\alpha \subset \Phi$ ein $k_{I\alpha} \in \mathbb{Z}$ gibt mit $v \in H_{I\alpha, k_{I\alpha}}$, d.h. $(P_I(\alpha^\vee)^\vee)(v) = k_{I\alpha} \in \mathbb{Z}$. Falls Φ nicht vom Typ ${}^2A_{2n}$ ist, ist (nach (2.5)) $P_I(\Delta^\vee)^\vee$ eine Basis von $\Phi^I = \Phi^{I, lang}$. Falls Φ vom Typ ${}^2A_{2n}$ ist, errechnet man (aus (2.5)), daß $P_I(\Delta^\vee)^\vee$ eine Basis von $\Phi^{I, lang}$ ist. \square

(2.40) Die Ecken des Alkovens: Sei Φ irreduzibel und $\tilde{\alpha}$ wie in Definition 2.33. Dann gibt es $c_{I\alpha} \in \mathbb{Z}_{>0}$, so daß

$$0 = \sum_{I\alpha \subset \Delta \cup I\tilde{\alpha}} c_{I\alpha} P_I(\alpha^\vee)^\vee = \sum_{I\alpha \subset \Delta \cup I\tilde{\alpha}} c_{I\alpha} c(\alpha) S_{I\alpha},$$

wobei $c(\alpha)$ aus 2.3 ist. Dabei ist $c_{I\tilde{\alpha}} = 1$. Die Dualbasis zu $P_I(\Delta^\vee)^\vee$ wurde in 2.5 angegeben. Mit den Bezeichnungen von dort sind die Ecken des Alkovens zu $\Delta_{aff}(\Phi, \theta)$, abgesehen vom Ursprung, genau die Punkte

$$\frac{1}{c_{I\alpha} \cdot c(\alpha)} P_I(\beta_\alpha^\vee), \quad I\alpha \subset \Delta$$

Die folgende Tabelle gibt die $c_{I\alpha}$ für alle irreduziblen Systeme an: Die Orbiten $I\alpha$ sind dabei genau so angeordnet, wie die $(S_{I\alpha^\vee})^\vee$ in Tabelle 2.36.

Φ	$\theta^* = id$	$\text{Ord}\theta^* = 2$
A_{2n-1}	alle $c_{I\alpha} = 1$	$\begin{smallmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ & & 1 & & & & \end{smallmatrix}$
C_n	$1 \ 2 \ 2 \ \dots \ 2 \ 2 \ 1$	
A_{2n}	alle $c_{I\alpha} = 1$	$1 \ 2 \ 2 \ \dots \ 2 \ 2 \ 1$
D_{n+1}	$\begin{smallmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ & & 1 & & & 1 \end{smallmatrix}$	$1 \ 2 \ 2 \ \dots \ 2 \ 2 \ 1$
B_n	$\begin{smallmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ & & 1 & & & & \end{smallmatrix}$	
E_8	$\begin{smallmatrix} & & 3 & & & & & \\ & 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}$	
E_7	$\begin{smallmatrix} & & & 2 & & & & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}$	
E_6	$\begin{smallmatrix} & & & 2 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}$	$2 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1$
F_4	$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 2$	
		$\text{Ord}\theta^* = 3$
D_4	$\begin{smallmatrix} & & 1 \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 \end{smallmatrix}$	$3 \ 2 \ 1$
G_2	$1 \ 2 \ 3$	

Beispiel 2.41. Φ vom Typ A_{2n} und $\Theta \neq id$.

Mit den Bezeichnungen aus Beispiel 2.4 hat man folgende (reelle) Alkoven

$$\text{Alk}(\Delta_{aff}(\Phi, id)) := \{(x_1, \dots, x_{m+1}) \in V \mid 1 + x_{m+1} > x_1 > x_2 > \dots > x_m > x_{m+1}\}$$

$$\text{Alk}(\Delta_{aff}(\Phi_I, id)) = \left\{ (x_1, \dots, x_n, 0, -x_n, \dots, -x_1) \in V^\Theta \mid \frac{1}{2} > x_1 > \dots > x_n > 0 \right\}$$

$$\text{Alk}(\Delta_{aff}(\Phi, \Theta)) = \left\{ (x_1, \dots, x_n, 0, -x_n, \dots, -x_1) \in V^\Theta \mid \frac{1}{4} > x_1 > \dots > x_n > 0 \right\}.$$

Obwohl die Dynkindiagramme der letzten beiden Alkoven gleich aussehen, sind die entsprechenden Alkoven nicht gleich. Insbesondere hat man folgende Stabilisatorgruppe dieser Alkoven in $P_I(\mathbb{Z}[\Phi]^*) \rtimes W^\Theta$:

$$\Omega_{\text{Alk}(\Delta_{aff}(\Phi_I, id))} \simeq \mathbb{Z}/2 \quad \text{aber} \quad \Omega_{\text{Alk}(\Delta_{aff}(\Phi, \Theta))} \simeq 1.$$

Folgerungen aus dem Satz von Steinberg

Hier werden noch zwei Resultate bewiesen, in denen der Satz von Steinberg eine/die entscheidende Ingredienz ist. Der folgende Satz geht ungetwistet (und für die Liealgebren) auf Dynkin [Dy57b, Theorem 5.1] zurück. (Vgl. [BW72] und [De81].)

Satz 2.42 (Dynkin). *Sei G eine reduktive Gruppe mit Wurzelsystem Φ und Splitting $\mathbf{spl}_G = (B, T, \{X_\alpha\})$. Identifiziere $\text{Out}(G) \simeq \text{Aut}(G, \mathbf{spl}_G)$ und fixiere ein Element θ^* daraus.*

- (a) *Die Typen der Wurzelsysteme $\Psi(G^{\text{int} \circ \theta^*})$, wobei $t \in T$ durchläuft, stehen in 1-1-Korrespondenz zu der Menge der echten Subsysteme von $\Delta_{\text{ext}}(\Phi, \theta^*)$, i.e. der Menge der (echten) Subgraphen des erweiterten Dynkindiagramms, wie es (Φ, θ^*) in Definition 2.33 zugewiesen wird.*
- (b) *Zu jedem $t \in T$ gibt es $w \in W^{\theta^*}$, so daß $G^{\text{int} w(t) \circ \theta^*}$ eine Basis in $\Delta_{\text{ext}}(\Phi, \theta^*)$ hat.*

Beweis:

Zu (a): Sei $\theta := \text{int} t \circ \theta^*$ und $t =: \exp(Y_\theta)$. Da nur Aussagen über das Wurzelsystem von G^θ bewiesen werden sollen, kann man o.B.d.A. G einfach zusammenhängend (und halbeinfach) annehmen. Da diese Gruppen direkte Produkte von Orbiten simpler Gruppen sind, sei o.B.d.A. $\Phi = \Phi(G, T)$ irreduzibel.

Um den Kammerkomplex auf V^I (aus (2.30)) zu beschreiben, sind die Hyperebenen $H_{I\alpha, k}$ mit α vom Typ III überflüssig (denn $H_{I\alpha, k} = H_{I\alpha', 2k}$, wenn $\alpha = \alpha' + \theta(\alpha')$ nach (2.5.9)). Um später halbganze Zahlen zu vermeiden wird unnormiert:

$$H_{I\alpha, k}^{\text{nor}} := \begin{cases} H_{I\alpha, k} & \text{falls } \alpha \text{ nicht vom Typ III ist} \\ H_{I\alpha, k/2} = H_{I\alpha', k} & \text{falls } \alpha = \alpha' + \theta(\alpha') \text{ vom Typ III.} \end{cases}$$

Nach Steinbergs Satz 2.27 ist mit diesen Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \Phi(G^\theta, T^\theta) &= \left\{ P_I(\alpha) \mid (S_{I\alpha})(Y_\theta) \in \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } \alpha \text{ vom Typ I oder II} \\ \mathbb{Z} + \frac{1}{2} & \text{falls } \alpha \text{ vom Typ III} \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ P_I(\alpha) \mid P_I(Y_\theta) \in H_{I\alpha, k}^{\text{nor}}, \text{ wobei } \begin{cases} k \in \mathbb{Z} & \text{falls } \alpha \text{ Typ I} \\ k \in 2\mathbb{Z} & \text{falls } \alpha \text{ Typ II} \\ k \in 1 + 2\mathbb{Z} & \text{falls } \alpha \text{ Typ III} \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

Fixiere die Kammer $C_0 \subset V^I$ des komplexifizierten Komplexes aus (2.31) mit $0 \in \overline{C}_0$, die zu der θ -stabilen Basis $\Delta = \Delta(B, T)$ von Φ korrespondiert. Dies legt eine θ -stabile Basis Δ von Φ und den θ -Orbit von $\tilde{\alpha}$ aus Definition 2.33 fest.

Nun soll eine Basis von $\Phi(G^\theta, T^\theta) \subset P_I(\Phi)$ bestimmt werden. Weil $\mathbb{Z}[P_I(\Phi^\vee)] \rtimes W^I$ transitiv auf den Kammern von V^I operiert, gibt es im Orbit von $P_I(Y_\theta)$ einen Punkt $Y_0 \in \overline{C}_0$. Fixiere ein $g := w.x \in \mathbb{Z}[P_I(\Phi^\vee)] \rtimes W^I$ mit $g(Y_\theta) = Y_0$. Wenn $P_I(\Phi)$ reduziert ist, bestimmen die Wurzeln der Wände von C_0 , auf denen Y_0 liegt, die Basis

$$\tilde{\Delta}(Y_0) := \left\{ P_I(\alpha^\vee)^\vee \mid \begin{array}{l} \alpha \in \Delta \cup I\tilde{\alpha} \text{ mit } Y_0 \in H_{I\alpha, k_{I\alpha}}^{\text{nor}}, \\ \text{wobei } k_{I\tilde{\alpha}} = 1 \text{ und sonst } k_{I\alpha} = 0 \end{array} \right\} \subset P_I(\Delta^\vee)^\vee \cup \{P_I(\tilde{\alpha}^\vee)^\vee\}$$

des Wurzelsystems

$$\tilde{\Phi}(Y_0) := \{P_I(\alpha^\vee)^\vee \mid \alpha \in \Phi, \text{ so daß } \exists k \in \mathbb{Z} : Y_0 \in H_{I\alpha, k}^{\text{nor}}\} \subset P_I(\Phi^\vee)^\vee,$$

das über g^{-1} isomorph ist zu $\tilde{\Phi}(P_I(Y_\theta)) =: \tilde{\Phi}(Y_\theta)$. (Falls $P_I(\Phi^\vee)^\vee$ nicht reduziert ist, ist $\tilde{\Delta}(Y_0)$ nur Basis eines reduzierten Subsystems von $\tilde{\Phi}(Y_0)$. S.u.)

Der restliche Beweis zerfällt in drei verschiedene Fälle.

Fall 1: $\theta^* = id$.

Dann ist $P_I(\alpha^\vee)^\vee = P_I(\alpha) = \alpha$. Daher ist $\tilde{\Delta}(Y_0)$ eine Basis von $\Phi(G^\theta, T^\theta)$. Sie ist in $\Delta_{ext}(\Phi, id) = \Delta \cup \{-\alpha^+\}$ enthalten. (denn $-\tilde{\alpha}$ ist hier die längste Wurzel in Φ^+ .)

In den restlichen Fällen ist Φ vom Typ ADE. Normiere Φ so, daß $\|\alpha\|^2 = 2$ für alle $\alpha \in \Phi$. Dann gilt $P_I(\alpha^\vee)^\vee = \frac{2}{\|P_I(\alpha)\|^2} P_I(\alpha)$ (einfache Rechnung). Daher gibt es eine "formale Dualisierungsabbildung"

$$(\cdot)^\cup : P_I(\Phi) \xrightarrow{1-\cdot} P_I(\Phi^\vee)^\vee \quad P_I(\alpha) \mapsto \frac{2}{\|P_I(\alpha)\|^2} P_I(\alpha) =: P_I(\alpha)^\cup,$$

mit einer analog gebildeten Umkehrabbildung, die (wie üblich) die gleiche Bezeichnung tragen möge.

Fall 2: $\theta^* \neq id$ und Φ ist nicht vom Typ A_{2n} .

Dann ist das Wurzelsystem $\tilde{\Phi}$ reduziert und nach Steinberg gilt $\tilde{\Phi}(Y_0)^\cup = \Phi(G^\theta, T^\theta)$. Daher bildet das formale Dual $\tilde{\Delta}(Y_0)^\cup$ zwangsweise eine Basis von $\Phi(G^\theta, T^\theta) = \tilde{\Phi}(Y_0)^\cup$. Nach Konstruktion ist $\tilde{\Delta}(Y_0)^\cup \subset \Delta_{ext}(\Phi, \theta^*) = \{P_I(\alpha) \mid \alpha \in \Delta\} \cup \{P_I(\tilde{\alpha})\}$.

Fall 3: $\theta^* \neq id$ und Φ ist vom Typ A_{2n} .

Erste Beweisvariante. Die elementarere Matrizenrechnung kommt anschließend. Das Wurzelsystem $\tilde{\Phi}(Y_0)$ ist nicht reduziert (und $\tilde{\Delta}(Y_0)$ im Allgemeinen keine Basis mehr). Man sucht eine Basis des maximalen reduzierten Subsystems $\Phi(G^\theta, T^\theta) \subset \tilde{\Phi}(Y_0)^\cup$. Weil $\mathbb{Z}[P_I(\Phi^\vee)] \rtimes W^I$ über Spiegelungen an den Wänden zu (all) den $H_{I\alpha,k}^{nor}$ ($\alpha \in \Phi$, $k \in \mathbb{Z}$) auf V^I operiert, kann man folgende Beobachtung ableiten:

Beobachtung: Wenn $w.x \in \mathbb{Z}[P_I(\Phi^\vee)] \rtimes W^I$ und $(w.x)(H_{I\alpha,k}) = H_{Iw(\alpha),l}$, dann gilt $k \equiv l \pmod{2}$.

Wenn man $\Phi(G^\theta, T^\theta)$ formal dualisiert (zu $\Phi(G^\theta, T^\theta)^\cup \subset \tilde{\Phi}(Y_\theta)$) und dann über das früher fixierte $g = w.x$ isomorph auf ein Subsystem von $\tilde{\Phi}(Y_0)$ abbildet, erhält man daher mit Steinberg

$$(v) \quad \Phi(G^\theta)_0^\cup := \left\{ P_I(\alpha)^\cup \mid Y_0 \in H_{I\alpha,k}^{nor}, \text{ wobei } \begin{cases} k \in \mathbb{Z} & (\alpha \text{ Typ I}) \\ k \in 2\mathbb{Z} & (\alpha \text{ Typ II}) \\ k \in 1 + 2\mathbb{Z} & (\alpha \text{ Typ III}) \end{cases} \right\}$$

D.h. $\Phi(G^\theta)_0^\cup \subset P_I(\Phi^\vee)^\vee$ zerfällt in Wurzeln mittlerer Länge (α vom Typ I), kürzester Länge im BC -System $P_I(\Phi^\vee)^\vee$ (das sind die, deren α vom Typ III ist) und Wurzeln maximaler Länge (wenn α vom Typ II ist). In einem BC -System sind genau dann sowohl α als auch 2α Wurzeln, wenn α kürzeste (und 2α maximale) Länge hat.

Daher bildet eine Basis des maximalen B -Subsystems von $\tilde{\Phi}(Y_0)$ auch eine Basis von $\tilde{\Phi}(Y_0)$ selbst. Man erhält sie, indem man in $\tilde{\Delta}(Y_0)$ alle Wurzeln maximaler Länge (das sind höchstens zwei!) halbiert. Sei $\tilde{\Delta}_{BC}$ die Vereinigung dieser Basis mit $\tilde{\Delta}(Y_0)$. (In $\tilde{\Delta}_{BC}$ sind also alle positiven Vielfachen aller Wurzeln (aus Φ^I) mitenthalten. Darum ist das selten eine Basis, aber mir fällt keine bessere Bezeichnung ein.) Mit diesen Bezeichnungen (und Bemerkungen) ist

$$\tilde{\Delta}_{BC} \cap \Phi(G^\theta)_0^\cup$$

eine Basis von $\Phi(G^\theta)_0^\cup$. Es bleibt zu zeigen, daß das formale Dual dieser Basis in $\Delta_{ext}(\Phi, \theta^*)$ liegt; anders formuliert, daß

$$\tilde{\Delta}_{BC} \cap \Phi(G^\theta)_0^\cup \subset \Delta_{ext}(\Phi, \theta^*)^\cup = P_I(\Delta)^\cup \cup \{(2 \cdot P_I(\tilde{\alpha}))^\cup\} = P_I(\Delta^\vee)^\vee \cup \left\{ \frac{1}{2} P_I(\tilde{\alpha}^\vee)^\vee \right\}.$$

Das folgt mit der Beobachtung aus (v), denn von einem Paar $\beta, 2\beta \in \tilde{\Delta}_{BC}$ ist genau dann $\beta \in \Phi(G^\theta)_0^\cup$, wenn $\beta \in H_{I\tilde{\alpha},1}^{nor}$. (Denn 1 ist die einzige ungerade Zahl in $\{0, 1, 2\}$ und der Deckel $H_{I\tilde{\alpha},1}^{nor}$ die einzige Wand des Alkoven mit ungeradem $k_{I\tilde{\alpha}} = 1$.) Daher muß erstens die nicht reduzierte Wurzel $P_I(\alpha^\vee)^\vee$ in der Levi-Basis $P_I(\Delta^\vee)^\vee$ maximale Länge haben, d.h. $\alpha \in \Delta$ muß vom Typ II sein. (Ist erfüllt!) Zweitens muß die zusätzliche Wurzel für den Deckel in $\Phi(G^\theta)_0^\cup$ kürzeste Länge haben. Somit ist ihr formales Dual in $\Delta_{ext}(\Phi, \theta^*)$ von maximaler Länge: $(S_{I\tilde{\alpha}^\vee})^\vee = c(\tilde{\alpha})P_I(\tilde{\alpha}) = 2P_I(\tilde{\alpha})$.

Zweite Beweisvariante von Fall 3.

Sei $(\Phi, I) = {}^2A_{2n}$, d.h. $G = \mathrm{Sl}(2n+1)$. Die Bezeichnungen aus den Beispielen 2.19 und 2.4 werden weiterverwendet. Sei $t = \mathrm{Diag}(t_1, \dots, t_{2n+1}) \in T$ ein Element des Diagonaltorus T . Die Operation der Weylgruppe $W(\mathrm{Sl}(2n+1))^{\theta^*}$ auf t wird beschrieben durch folgende Erzeuger von W^{θ^*}

- (W1) $s_{P_I(\varepsilon_i - \varepsilon_j)}$ (für $1 \leq i < j \leq n$) vertauscht t_i mit t_j und gleichzeitig t_{2n+2-i} mit t_{2n+2-j} (und beläßt alles andere unberührt).
- (W2) $s_{P_I(\varepsilon_i - \varepsilon_{2n+2-i})} = s_{\varepsilon_i - \varepsilon_{2n+2-i}}$ vertauscht t_i mit t_{2n+2-i} .

Nun wird t innerhalb seines W^{θ^*} -Orbits geeignet abgeändert. Betrachte die Menge aller Quotienten $\{t_i/t_{2n+2-i} \mid 1 \leq i \leq n\} =: Q$. Wenn in Q für ein $\lambda \neq \pm 1$ sowohl λ als λ^{-1} vorkommen sollte, fixiere eine der beiden Zahlen (λ) und invertiere mit geeignete Weylgruppenelemente der Form (W2) alle $t_i/t_{2n+2-i} = \lambda^{-1}$. Danach darf man annehmen, daß $Q = \{\lambda_i \mid 1 \leq i \leq k\}$, wobei die λ_i paarweise verschieden sind und die $\lambda_i \neq \pm 1$ auch verschieden von allen λ_j^{-1} . Falls 1 oder -1 in Q vorkommen, sei stets $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_k = -1$.

Nun sieht man sofort, daß man t mit Permutationen vom Typ (W1) auf folgende

Blockgestalt bringen kann: ($x := t_{n+1} \in \bar{F}^\times$!)

$$\left(\begin{array}{c} \boxed{\tau_{-k}} \\ \vdots \\ \boxed{\tau_{-1}} \\ x \\ \boxed{\tau_1} \\ \vdots \\ \boxed{\tau_k} \end{array} \right) \text{ mit } \tau_{-i} = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_{m_i} \end{pmatrix} \Rightarrow \tau_i = \lambda_i \cdot \begin{pmatrix} x_{m_i} & & \\ & \ddots & \\ & & x_1 \end{pmatrix}$$

für geeignete $m_i \in \mathbb{N}$ (so daß $n = \sum_{i=1}^k m_i$). Nach Steinberg 2.27 gilt für dieses t :

$$G^{t\theta^*} = \left(\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boxed{\star} & \\ & \boxed{\times} \end{array} \\ \vdots \\ \begin{array}{cc} \boxed{\star} & \\ & \boxed{\times} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} \boxed{\star} & \boxed{\star} \\ \boxed{\star} & \boxed{\star} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} \boxed{\star} & \\ & \boxed{\times} \end{array} \\ \vdots \\ \begin{array}{cc} \boxed{\star} & \\ & \boxed{\times} \end{array} \end{array} \right) \simeq \mathrm{Sp}(2m_k) \times \mathrm{Gl}(m_{k-1}) \times \cdots \\ \cdots \times \mathrm{Gl}(m_2) \times \mathrm{SO}(2m_1 + 1)$$

ist vom Typ $C_{m_k} \times A_{m_{k-1}} \times \cdots \times A_{m_2} \times B_{m_1}$ und hat eine Basis, die Teilmenge ist von $P_I(\Delta) \cup \{-(\varepsilon_1 - \varepsilon_{2n+1})\}$. Aber $\varepsilon_1 - \varepsilon_{2n+1} = \alpha^+ = -c(\tilde{\alpha})P_I(\tilde{\alpha})$ (vgl. Beispiel 2.4).

Umgekehrt kann man jede Teilmenge von $\Delta_{ext}(\Phi, \theta^*)$ so bekommen, denn wenn man alles zurückverfolgt, sieht man, daß es genügt, zu jeder vorgegebenen Teilmenge der Wände $\{H_{I\alpha,0}^{nor} \mid I\alpha \subset \Delta\} \cup \{H_{I\tilde{\alpha},1}^{nor}\}$ von $C_0 \cap V^I$ Punkte zu finden, die genau auf den Hyperebenen dieser Teilmenge und sonst keinen liegen. Aber $\overline{C}_0 \cap V^I$ ist für irreduzibles $P_I(\Phi)$ ein $(\dim V_{der}^I - 1)$ Simplex in V^I , denn die $H_{I\alpha,0}^{nor}$ sind (nach (2.5.3)) $\dim V_{der}^I$ paarweise verschiedene Hyperebenen, die 0 enthalten, und die zusätzliche Hyperebene hat nichtleeren Schnitt mit allen anderen. Daher entspricht jeder Facette von $\overline{C}_0 \cap V^I$ eine der gesuchten Teilmengen.

Zu (b): Das wurde oben durch die Normierung auf die Kammer C_0 eigentlich bereits mitbewiesen. Sei $Y \in V'$ so, daß $\exp Y = t$. Weil $P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I$ transitiv auf den Kammern in V'^I operiert, existieren $w \in W^I$ und $Z \in \mathbb{Z}[\Phi^\vee]$, so daß

$$\overline{C}_0 \ni (P_I(Z) \rtimes w)(P_I(Y)) = w(P_I(Y)) + P_I(Z) = P_I(w(Y) + Z).$$

Man hat $\mathrm{int}(\exp(w(Y) + Z)) \circ \theta^* = \mathrm{int} w(t) \circ \theta^*$. Weil $P_I(w(Y) + Z) \in \overline{C}_0$, bilden nach Teil (a) die Wurzeln $P_I(\alpha)$ zu den Wänden von C_0 , für die $w(Y) + Z \in H_{I\alpha,k}$ (für geeignetes $k \in \mathbb{Z}$), eine Basis von $\Phi((G^{\mathrm{int} w(t) \circ \theta^*})^\circ, T^{\theta^\circ})$ und ein Subsystem von $\Delta_{ext}(\Phi, \theta^*)$. \square

Behauptung 2.43. *Sei G einfach algebraisch und einfach zusammenhängend mit irreduziblem Wurzelsystem Φ gegeben, B eine Borelgruppe und $\theta \in \text{Aut}(G, B, T)$. Es gibt $b_\gamma \in \mathbb{Z}_{>0}$, so daß*

$$0 = \sum_{\gamma \in \Delta_{\text{ext}}(\Phi, \theta^*) \subset P_I(\Phi)} b_\gamma \cdot \gamma^\vee \quad \text{und} \quad 1 = \text{ggT}\{b_\gamma \mid \gamma \in \Delta_{\text{ext}}(\Phi, \theta^*)\}$$

Sei $H := G^\theta$. Nach Satz 2.42 faßt man eine Basis Δ_H von Φ_H als Teilmenge von $\Delta_{\text{ext}}(\Phi, \theta^*)$ auf. Es gilt

$$\pi_1(H) = \mathbb{Z}/b \times \mathbb{Z}^{\text{Rang}(P_I(\Phi)) - \text{Rang}(\Phi_H)},$$

wobei $b = \text{ggT}\{b_\gamma \mid \Delta_H \not\ni \gamma \in \Delta_{\text{ext}}(\Phi, \theta^*)\}$. Man hat $1 \leq b \leq 6$ und falls z.B. keine E_8 -Faktoren in G vorkommen, gilt sogar $b \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Beweis: Die Existenz der b_γ verifiziert man durch Nachrechnen: Mit exakt derselben Anordnung der Wurzeln wie in Tabelle 2.36 erhält man:

Φ	$\theta^* = id$	$\text{Ord}\theta^* = 2$
A_{2n-1}	alle $b_\alpha = 1$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \ 2 \ 2 \ \dots \ 2 \ 2 \ 2$
C_n	alle $b_\alpha = 1$	
A_{2n}	alle $b_\alpha = 1$	$2 \ 2 \ 2 \ \dots \ 2 \ 2 \ 1$
D_{n+1}	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \ 2 \ 2 \ \dots \ 2 \ 2 \ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$	$1 \ 2 \ 2 \ \dots \ 2 \ 2 \ 1$
B_n	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \ 2 \ 2 \ \dots \ 2 \ 2 \ 1$	
E_8	$\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \ 4 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \end{smallmatrix}$	
E_7	$\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \end{smallmatrix}$	
E_6	$\begin{smallmatrix} 2 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \end{smallmatrix}$	$2 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1$
F_4	$1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1$	
		$\text{Ord}\theta^* = 3$
D_4	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \ 2 \ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$	$3 \ 2 \ 1$
G_2	$1 \ 2 \ 1$	

Nach 1.11 ist $\pi_1(H) = X_*(T^{I^\circ})/\mathbb{Z}[\Phi_H^\vee] = \mathbb{Z}[\Phi^\vee]^I/\mathbb{Z}[\Phi_H^\vee]$ und $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]^I = \mathbb{Z}[\Delta_{\text{ext}}(\Phi, \theta^*)^\vee]$, denn nach (2.5.3) ist $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]^I = \mathbb{Z}[\{S_{I\alpha^\vee} \mid \alpha^\vee \in \Phi^\vee\}]$ und dieses Gitter wird von $\Delta_{\text{ext}}(\Phi, \theta^*)^\vee$ erzeugt. In jedem irreduziblen System kommt ein $\beta \in \Delta_{\text{ext}}(\Phi, \theta^*)$ vor mit $b_\beta = 1$. Seien $\tilde{\Delta}^\vee := \Delta_{\text{ext}}(\Phi, \theta^*)^\vee \setminus \{\beta^\vee\}$ und $S := \tilde{\Delta}^\vee \setminus \Delta_H^\vee$. Dann ist $\tilde{\Delta}^\vee$ eine

\mathbb{Z} -Basis von $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]^I$ (denn $b_\beta = 1$).

Die Aussage über den freien Anteil von $\pi_1(H)$ ergibt sich einfach aus Dimensionsüberlegungen. Somit ist man fertig, wenn Folgendes bewiesen ist: Wenn $x \in \mathbb{Z}[\Phi^\vee]^I$ in $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]^I / \mathbb{Z}[\Phi_H^\vee]$ Torsion hat, dann gibt es ein $l \in \mathbb{Z}$ mit

$$x \equiv \frac{l}{b} \sum_{\gamma^\vee \in S} b_\gamma \cdot \gamma^\vee \quad \text{mod } \mathbb{Z}[\Delta_H^\vee \cap \tilde{\Delta}^\vee].$$

Seien $x_\gamma \in \mathbb{Z}$ mit $x = \sum_{\gamma^\vee \in \tilde{\Delta}^\vee} x_\gamma \gamma^\vee$. Weil x in $\pi_1(H)$ Torsion hat, gibt es ein minimales $k > 0$, so daß $kx \in \mathbb{Z}[\Phi_H^\vee]$. Aber $\mathbb{Z}[\Phi_H^\vee]$ hat eine \mathbb{Z} -Basis aus $\Delta_H^\vee \cap \tilde{\Delta}^\vee$ und gegebenenfalls β^\vee . Also gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$ mit

$$\sum_{\gamma^\vee \in \tilde{\Delta}^\vee} kx_\gamma \gamma^\vee = kx \equiv -m\beta^\vee = \sum_{\gamma^\vee \in \tilde{\Delta}^\vee} mb_\gamma \gamma^\vee \quad \text{mod } \mathbb{Z}[\Delta_H^\vee \cap \tilde{\Delta}^\vee],$$

wobei $m = 0$, falls $\beta^\vee \notin \Delta_H^\vee$. Daher gilt $kx_\gamma = mb_\gamma$ für $\gamma^\vee \in S$. Für jeden Teiler c von k und m ist offensichtlich bereits $\frac{k}{c}x \in \mathbb{Z}[\Phi_H^\vee]$. Wegen Minimalität sind somit k und m teilerfremd, d.h. $k \mid b_\gamma$ für alle $\gamma^\vee \in S$. Also teilt $k \mid b$ und es existiert ein l mit $x_\gamma = \frac{l}{b}b_\gamma$ für $\gamma^\vee \in S$. \square

Beobachtung: Außer in A_{2n} -Systemen ist $b_{P_I(\tilde{\alpha})} = 1$, in den A_{2n} -Fällen ist jedoch $b_\gamma = 1$ nur für die einzige kurze Wurzel in $\Delta_{ext}(\Phi, \theta^*)$.

Gegenbeispiele

In diesem Paragraphen werden Gegenbeispiele gegen einige Verallgemeinerungswünsche in der Darstellung des Satzes von Steinberg gegeben. Insbesondere wird gezeigt, daß die Gruppen $W_2 \supset W_1 \supset W_0$ im Allgemeinen verschieden voneinander sind und auch verschieden von einer neuen Zwischengruppe $W_2 \supset W_{3/2} := \text{Bild}[N_{der}(T_{der})^I \rightarrow W^I] \supset W_1$.

Sei stets $J_n := ((-1)^i \delta_{i,n+1-j})_{i,j} \in \text{Mat}_{n \times n}$ und $\mathbf{spl}_{\text{Sl}(n)}$ bestehe aus den oberen Dreiecksmatrizen B , dem Diagonaltorus T und den Wurzelvektoren $\{X_{\alpha_i} := (\delta_{j,i} \delta_{k,i+1})_{j,k} \in \mathfrak{sl}(n)\}_{\alpha_i \in \Delta}$. Der Flip auf $\text{Sl}(n)$ bzw. $\text{Gl}(n)$ ist der Automorphismus $g \mapsto J_n \cdot {}^t g^{-1} \cdot J_n^{-1}$ aus $\text{Aut}(\text{Sl}(n), \mathbf{spl}_{\text{Sl}(n)})$

(2.44) Sei $G := \text{Gl}(4)$, θ^* der Flip, $\theta := t_\theta \cdot \theta^*$, $w := \text{int} n \in W(T)$, wobei

$$t_\theta := \begin{pmatrix} i & & & \\ & i & & \\ & & -i & \\ & & & -i \end{pmatrix} \in \text{Sl}(4) \quad \text{und} \quad n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \in \text{Gl}(4)$$

Dann ist $G_{der} = \text{Sl}(4)$, $\pi_0(G^\theta) \simeq \mathbb{Z}/2$, $\Phi(G^{\theta^\circ}) = \pm\{P_I(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), P_I(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\}$ vom Typ $A_1 \times A_1$ und $n \in N(T)^\theta$, aber $n \notin G^{\theta^\circ}$.

Hier erhält man $W_2 \simeq (\mathbb{Z}/2)^2 \rtimes (\mathbb{Z}/2) \not\simeq (\mathbb{Z}/2)^2 \simeq W_{3/2} = W_1 = W_0$. Außerdem ist

G_{der} einfach zusammenhängend, aber G^I nicht zusammenhängend, obwohl $I = \langle \theta \rangle$ zyklisch ist und θ fast halbeinfach. (Vgl. [Ca85, Theorem 3.5.6]!)

(2.45) Sei $G := \mathrm{Sl}(4)$, $I = \langle \sigma, \tau \rangle$, wobei σ^* der Flip, $\sigma := t_\sigma \cdot \sigma^*$, $\tau = t_\tau$,

$$\mathfrak{sl}(4) \ni Y_\sigma := \begin{pmatrix} 1/4 & & & \\ & 1/4 & & \\ & & -1/4 & \\ & & & -1/4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{Exp}} \begin{pmatrix} i & & & \\ & i & & \\ & & -i & \\ & & & -i \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad Y_\tau := \begin{pmatrix} 1/2 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{Exp}} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Dann ist G zwar einfach und einfach zusammenhängend aber G^I nicht zusammenhängend: Man hat $G^{I^\circ} = T^I$ und $G^I/G^{I^\circ} = \langle w \rangle \simeq \mathbb{Z}/2$, wobei $w \in W(T)$ die Permutation (14)(23) auf $T = \{ \mathrm{Diag}(x_1, x_2, x_3, x_4) \}$ bewirkt. Hier gilt $W_2 = W_1 = \langle w \rangle \neq 1 = W_0$.

(2.46) Sei alles wie im letzten Beispiel (2.45) nur $I = \langle \sigma, \tau, \rho \rangle$ mit $\rho = t_\rho = e^{-\frac{2\pi i}{8}} \cdot \mathrm{Diag}(-1, 1, 1, 1) = \mathrm{Exp}(Y_\rho)$ und $Y_\rho = \mathrm{Diag}(\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}) \in \mathfrak{sl}(4)$. Hier ist $G^I = G^{I^\circ} = T^I$, also $W_2 = W_1 = W_0 = 1$. Bei der Charakterisierung von W_1 in Behauptung 2.24(3) und (4) darf man in diesem Beispiel den zusätzlichen Durchschnitt mit $\bigcap_{t \in I \cap T_{ad}} W_t$ nicht weglassen. Weil nämlich $P_I(Y_\rho) = P_I(Y_\tau)$, ist wie in (2.45) $\bigcap_{\sigma \in I} \mathrm{Bild} \left[(P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I)_{P_I(Y_\sigma)} \rightarrow W^I \right] = \langle w \rangle \neq 1$ aber $w \notin W_{t_\rho}$.

(2.47) Sei $\mathrm{PGL}(2)$, $\theta = \mathrm{int} t$ mit $t = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ und $1 \neq w \in W$. Dann ist $W_2 = W_{3/2} = \langle w \rangle \neq 1 = W_1 = W_0$.

(2.48) Sei $G = \mathrm{Sl}(4) \times \mathrm{Sl}(4)$, $I = \langle \sigma, \tau, \rho \rangle$, $\rho = \rho^*$ vertausche die beiden Komponenten, σ^* bewirke den Flip auf der ersten Komponente (und die Identität auf der zweiten), τ^* den Flip auf der zweiten Komponente und seien $\tau := \mathrm{Exp}(Y_\tau) \cdot \tau^*$ bzw. $\sigma := \mathrm{Exp}(Y_\sigma) \cdot \sigma^*$ mit $Y_\tau = Y_\sigma = \mathrm{Diag}(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 | 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \in (\mathfrak{sl}(4) \times \mathfrak{sl}(4))^I$. (Die gesternte Aktion stabilisiert hier natürlich das Splitting $\mathbf{spl}_{\mathrm{Sl}(4)} \times \mathbf{spl}_{\mathrm{Sl}(4)}$.) Man hat $I \simeq I^* \simeq (\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2) \rtimes \mathbb{Z}/2$.

Hier ist $G^{I^\circ} \simeq \mathrm{Sl}(2) \times \mathrm{Sl}(2)$, wobei die Wurzelräume zu den beiden langen (positiven) Wurzeln in $P_I(\Phi(G))$ (ein C_2 -System) den unipotenten Anteil in B^{I° ergeben.

Außerdem ist G^I zusammenhängend: Das sieht man, indem man W_1 mit Behauptung 2.24 ausrechnet. Dazu muß man erst auf die irreduzible erste (o.E.) Komponente $\Phi_1 = \Phi(\mathrm{Sl}(4))$ reduzieren. Ihre Stabilisatorgruppe ist $I_1 := \langle \sigma, \tau \rangle$ und $\Phi = \mathrm{Ind}_{I_1}^I(\Phi_1)$. Dabei operiert τ als innerer Automorphismus zu $\mathrm{Diag}(1, -1, -1, 1)$ auf der ersten Komponente $G_1 = \mathrm{Sl}(4)$. Einerseits ist

$$\bigcap_{\sigma \in I_1} \mathrm{Bild} \left[(P_{I_1}(\mathbb{Z}[\Phi_1^\vee]) \rtimes W_1^{I_1})_{P_{I_1}(Y_{\sigma,1})} \rightarrow W_1^{I_1} \right] \simeq W^I,$$

andererseits gilt $\bigcap_{t \in I_1 \cap T_{ad}} (W_1)_t = \langle s_{14}, s_{23} \rangle \simeq (\mathbb{Z}/2)^2$, wobei s_{ij} die Spiegelung an der Wurzel $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ bezeichne. Zusammen hat man $W_2(\Phi_1, I_1) = W_1(\Phi_1, I_1) \simeq$

$(\mathbb{Z}/2)^2 \simeq W_0(\Phi_1, I_1)$, d.h. $G^I = G^{I^\circ}$.

Man kann eine solche Rechnung nicht für Φ selbst ausführen, denn man hat

$$\bigcap_{\sigma \in I} \text{Bild} \left[(P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I)_{P_I(Y_\sigma)} \rightarrow W^I \right] \cap \bigcap_{t \in I \cap T_{ad}} (W)_t = W^I = W(C_2).$$

Genauer sind die Mengen (1) und (2) in Behauptung 2.24 Kleinsche Vierergruppen $(\mathbb{Z}/2)^2$ aber die Mengen (3) und (4) die gesamte Weylgruppe zu C_2 , wenn man sie für das reduzible Φ berechnet. Der Grund ist, daß Lemma 2.11 in diesem (reduziblen) Fall nicht mehr zur Verfügung steht. Die Gleichheit (1)=(2) und (3)=(4) gilt mit dem Beweis von 2.24 nämlich für beliebiges Φ .

Im übrigen ist $\text{Bild} \left[\bigcap_{\sigma \in I} (P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I)_{P_I(Y_\sigma)} \rightarrow W^I \right] \simeq \mathbb{Z}/2$ und damit auch die Formel in (2.25) falsch für dieses (reduzible) Φ .

Lockerung der Bedingung an den Körper F

Die Bedingung " $F \subset \mathbb{C}$ " wurde in (2.1) gemacht, um die Exponentialabbildung $V \otimes \mathbb{C} \rightarrow T(\mathbb{C})$ benutzen zu können, d.h. die kompakten Punkte von $T(F)$ wurden stets als Untergruppe von $V/X_*(T)$ aufgefaßt. Um die Beweise auf algebraisch abgeschlossene F (mit $\text{char}(F) = 0$ oder genügend groß) zu übertragen, geht Steinberg in [St68, §5] folgendermaßen vor:

Das Charaktergitter $X^*(T)$ des F -Torus steht in \mathbb{Z} -Dualität zu $X_*(T)$, d.h. durch Erweiterung in \mathbb{R} -Dualität zu $V = X_*(T) \otimes \mathbb{R}$ und schließlich in \mathbb{R}/\mathbb{Z} -Dualität zu $V/X_*(T)$. Man benützt das folgende Lemma von T.A. Springer:

Lemma 2.49.

(a) Für jedes $t \in T(\bar{F})$ existiert ein $y \in V/X_*(T)$, so daß für $\alpha \in X^*(T)$ gilt:

$$\alpha(t) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha(y) = 0.$$

(b) Jeder Endomorphismus σ von T operiert auf $X_*(T)$, V sowie $V/X_*(T)$. Für t und y wie in (a) und alle $\alpha \in X^*(T)$ gilt: $\alpha(\sigma(t)) = 1 \Longleftrightarrow \alpha(\sigma(y)) = 0$,

(c) Jedes $y \in V/X_*(T)$ von endlicher Ordnung – welche prim zur Charakteristik ist, falls diese positiv ist – kann in (a) realisiert werden.

Beweis: [St68, 5.1+5.4] □

Weil alle Argumente in den Beweisen der Sätze von Steinberg und Dynkin, die die Exponentialabbildung (von Tori) verwenden, auf Inzidenzrelationen zurückgeführt werden können, kann man mit diesem Lemma die Sätze 2.12 und 2.42 auch für algebraisch abgeschlossene Körper F mit großer Charakteristik oder $\text{char}(F) = 0$ beweisen.

3 Tori

Maximale Tori in nicht zusammenhängenden reduktiven Gruppen

In diesem Kapitel wird nicht so sehr eine Theorie beliebiger unzusammenhängender reduktiver Gruppen betrieben, als vielmehr eine Zusammenhangskomponente L einer solchen Gruppe analysiert. Da ich aber gern mit Gruppen arbeite, betrachtet man immer die von dieser Zusammenhangskomponente erzeugte Gruppe.

Daher sei $\tilde{G} = \langle L \rangle$ eine reduktive Gruppe über einem p -adische Körper F mit Einszusammenhangskomponente G und $\pi_0(\tilde{G}) = \tilde{G}/G \simeq \mathbb{Z}/l$.

Die beiden nächsten Lemma sind (neben dem Satz von Steinberg) die Grundlage der folgenden Theorie nicht zusammenhängender Tori in \tilde{G} .

Die Operation eines Automorphismus auf G wird halbeinfach genannt, wenn er durch Konjugation mit einem halbeinfachen Element in einer Obergruppen von G bewirkt werden kann. Wenn $\text{Cent}(G)$ endlich ist, ist $\text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$ endlich. Dann operiert σ genau dann halbeinfach auf G , wenn für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$ ein halbeinfaches $g \in G$ existiert mit $\sigma^m = \text{int}g$. (Eine dritte äquivalente Formulierung ist: σ operiert diagonalisierbar auf $\text{Lie}(G)$.)

Lemma 3.1 (Steinberg).

(a) Sei G eine zusammenhängende reduktive Gruppe und $\sigma \in \text{Aut}(G)$. Dann gibt es eine σ -stabile (\bar{F} -) Borelgruppe in G .

(b) Wenn σ halbeinfach auf G operiert, dann stabilisiert σ ein (\bar{F} -) Paar (B, T) .

Beweis: [St68, 7.3+7.5] □

Lemma 3.2. Wenn $\sigma \in \text{Aut}(G)$ halbeinfach auf G operiert und T ein σ -stabiler, maximaler Torus von G , dann enthält $(T^\sigma)^\circ$ stark reguläre Elemente. (Regulär in G !)

Beweis: Nach Lemma 3.1 stabilisiert σ ein geeignetes Paar (B, T) , mithin die Basis $\Delta = \Delta(B, T)$ sowie ihre Dualbasis $\Delta^* \subset X_*(T) \otimes \mathbb{Q}$. (Vgl. (2.5.10).) Sei $x_0 := \sum_{\beta^\vee \in \Delta^*} \beta^\vee$. Für alle $\alpha \in \Phi^+(B, T)$ ist dann $n_\alpha := \langle \alpha, x_0 \rangle =: n_\alpha \in \mathbb{Z}_{>0}$ (denn α ist nichtnegative ganze Linearkombination von Δ und $\alpha \neq 0$).

Wähle ein $u \in F^\times$, das keine Einheitswurzel ist, und ein $m \in \mathbb{N}$, so daß $mx_0 \in X_*(T)$. Dann ist $t := (mx_0) \otimes u \in X_*(T)^\sigma \otimes \bar{F}^\times = T^\sigma(\bar{F})$ stark regulär in G , denn für alle $\alpha \in \Phi^+$ gilt $\alpha(mx_0 \otimes u) = u^{\langle \alpha, mx_0 \rangle} = u^{mn_\alpha} \neq 1$. □

Definition 3.3. Eine Untergruppe \tilde{T} von \tilde{G} wird als **Torus bezüglich** L bezeichnet, wenn $\tilde{T} \cap G$ ein Torus in G ist und ihr Schnitt mit L nicht leer ist.

Ein F -Torus \tilde{T} ist **anisotrop**, falls sein zentraler Torus $(\text{Cent}(\tilde{T}))^\circ$ anisotrop ist, i.e. keine F -rationalen Charaktere besitzt.

Falls die Elemente aus $\tilde{T} \cap L$ eine F -Borelgruppe B stabilisieren, wird der F -Torus

\tilde{T} als **F -Quasisplittorus** bzgl. L bezeichnet.

Ein $g \in L$ heißt **fast halbeinfach**, wenn es eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- (1) Die Operation von g (durch $\text{int}g|_G$) auf G stabilisiert ein Paar (B, T) .
- (2) g operiert halbeinfach auf G_{der} .
- (3) g liegt in einem Torus \tilde{T} bzgl. L .
- (4) $\text{Cent}(G^g, \tilde{G})$ ist ein Torus bzgl. L .

Ein fast halbeinfaches Element $g \in L$ ist **regulär**, wenn $(G^g)^\circ$ ein Torus in G ist. Man bezeichnet g als **stark regulär**, wenn G^g abelsch ist.

Ein fast einfacher Automorphismus Θ von G heißt **speziell**, wenn die Weylgruppen von G^{Θ° und von $P_{(\Theta)}(\Phi(G))$ isomorph sind. Ebenso wird ein fast halbeinfaches Element $g \in L$ **speziell** genannt, wenn $\Theta := \text{int}g|_G$ speziell ist.

Beweis der Äquivalenz der verschiedenen Definitionen von "fast halbeinfach": (4) \Rightarrow (3) ist klar und (2) \Rightarrow (1) ist Lemma 3.1.b. Weil $g^l \in \tilde{T} \cap G$ in einem Torus liegt, d.h. halbeinfach ist, gilt (3) \Rightarrow (2). (Jordanzerlegung!) Für (1) \Rightarrow (4) sei spl_G ein Splitting von G , das (B, T) enthält, und θ^* die gesternte Aktion von $\text{int}g$ bzgl. spl_G . Dann gibt es ein $h \in G$ mit $\text{int}g = \text{int}h \circ \theta^*$. Weil θ^* und g das Paar (B, T) stabilisieren, muß $h \in T$ sein. Daher ist $T^{\theta^*} \subset G^g$. Weil G^g nach Lemma 3.2 reguläre Elemente enthält, ist $\text{Cent}(G^g, \tilde{G})$ ein Torus. \square

Anmerkungen:

- (a) Klarerweise sind die Tori bzgl. G in \tilde{G} gerade die (gewöhnlichen) Tori in $G = \tilde{G}^\circ$.
- (b) Lemma 3.2 gilt verbatim, wenn θ ein fast halbeinfaches Element aus L ist.
- (c) Es wird nicht gefordert, daß für stark reguläre $g \in L$ der Zentralisator G^g ein Torus ist! Sei z.B. $G = \text{Gl}(2n+1)$ und $\theta \in L$ bewirke den Flip $\text{int}\theta(g) =: \Theta(g) = J \cdot {}^t g^{-1} \cdot J^{-1}$ aus Beispiel 2.19. Dann ist jedes fast halbeinfache Element $G(\bar{F})$ -konjugiert zu einem Element $t\theta \in T(\bar{F}) \rtimes \theta \subset L$, wobei T der Diagonaltorus ist. Ein solches $t\theta$ ist stark regulär, wenn $(t\theta)^2 = t \cdot \Theta(t) \in T^\Theta$ stark regulär ist, aber für alle diese gilt $G^{t\theta} = T^\Theta = \{\text{Diag}(x_1, \dots, x_n, \pm 1, x_n^{-1}, \dots, x_1^{-1})\}$.

Behauptung 3.4. Die Menge der maximalen Tori bzgl. L in \tilde{G} ist die Menge aller $\text{Cent}(G^g, \tilde{G})$, für die $g \in L$ fast halbeinfach und stark regulär ist. Die Abbildung $\tilde{T} \mapsto \text{Cent}(\tilde{T})^\circ$ stiftet eine Bijektion zwischen dieser Menge und der Menge der $(G^g)^\circ$, wobei $g \in L$ fast halbeinfach und stark regulär ist (d.h. der Menge der Einskomponenten abelscher Zentralisatoren G^g mit $g \in G^\theta$). Die Umkehrabbildung ist $U \mapsto \text{Cent}(U, \tilde{G})$.

Beweis: Man bemerkt zuerst, daß die maximalen Tori bzgl. L die Form $T \cdot \langle \theta_T \rangle$ haben, wobei T ein maximaler Torus in G ist und $\theta_T \in L(\bar{F})$ ein T stabilisierendes Element aus L ist: Sei dazu ein beliebiger Torus \tilde{T} bzgl. L gegeben. Betrachte $\text{Cent}(\tilde{T} \cap G, G) =: M$. Dies ist eine reduktive (Levi-) Gruppe, auf der die Elemente aus $\tilde{T} \cap L$ alle denselben (fast halbeinfachen) Automorphismus θ_T bewirken. Also

gibt es einen θ_T -stabilen, maximalen Torus $T \subset M$. Dann ist $T \cdot \tilde{T}$ ein maximaler Torus von der oben beschriebenen Form.

Sei nun $\tilde{T} := T \cdot \langle \theta_T \rangle$ ein maximaler Torus wie zu Beginn des Beweises. Weil θ_T fast halbeinfach ist, enthält $(T^{\theta_T})^\circ = \text{Cent}(\tilde{T})^\circ$ nach Lemma 3.2 stark reguläre Elemente in G . Daher ist $\text{Cent}(\text{Cent}(\tilde{T})^\circ, \tilde{G}) = T \cdot \langle \theta_T \rangle = \tilde{T}$, d.h. $U \mapsto \text{Cent}(U, \tilde{G})$ ist die linksinverse Abbildung zu $\tilde{T} \mapsto \text{Cent}(\tilde{T})^\circ$. Weil die in der Behauptung angegebene Menge genau das Bild der Menge der maximalen Tori (bzgl. L) unter der Abbildung $\tilde{T} \mapsto \text{Cent}(\tilde{T})^\circ$ ist, hat man eine Bijektion. \square

Behauptung 3.5.

(a) Die quasizerfallenden unter den maximalen F -Splittori \tilde{T} bzgl. L mit $\tilde{T}(F) \cap L \neq \emptyset$ sind $G(F)$ -konjugiert zueinander.

(b) Sei \tilde{T} ein Torus bzgl. L und $\theta' \in \tilde{T} \cap L$ speziell. Dann ist

$$\text{Norm}(\tilde{T}, G) = \tilde{T}^\circ \cdot \text{Norm}(\tilde{T}^\circ, G)^{\theta'}$$

Beweis: Zu (a): Seien zwei maximale F -Splittori \tilde{T}_1 und \tilde{T}_2 gegeben und seien $T_i := \tilde{T}_i^\circ$ und $\theta_i \in \tilde{T}_i(F) \cap L$. Die θ_i stabilisieren (nach 3.3) F -Paare (B_i, T_i) . Weil je zwei F -Paare $G(F)$ -konjugiert sind, existiert ein $g \in G(F)$ mit $g(B_1, T_1)g^{-1} = (B_2, T_2)$. Man hat sogar $g\tilde{T}_1g^{-1} = \tilde{T}_2$, denn $\theta' := g\theta_1g^{-1} \in L$ und $\theta_2 \in L$ stabilisieren (B_2, T_2) . Daher ist $\theta'^{-1}\theta_2 \in T_2(F)$.

Zu (b): Sei $T := \tilde{T}^\circ$. Offensichtlich ist $T \subset \text{Norm}(\tilde{T}, G) \subset \text{Norm}(T, G)$. Sei $n(w) \in \text{Norm}(T, G)$ ein Vertreter von $w \in W = \text{Norm}(T, G)/T$. Dann ist $n(w) \in \text{Norm}(\tilde{T}, G)$ gleichbedeutend mit $w \in W^{\theta'}$. Nach dem Satz von Steinberg 2.27 kann man die Weilgruppe von $G^{\theta'}$ als Untergruppe von $W(P_I(\Phi))$ auffassen. Weil θ' speziell ist, hat w dann einen Vertreter in $\text{Norm}(T, G)^{\theta'}$. \square

Von (3.7) bis (3.12) sind verschiedene nützliche Fakten gesammelt, die nun nicht mehr schwer zu beweisen sind. Bis (3.10) sei \tilde{T} stets ein maximaler Torus bzgl. L und $T := \tilde{T}^\circ$.

(3.6) Der Satz von Dynkin 2.42 garantiert die Existenz von speziellen Elementen $\theta' \in \tilde{T} \cap L$. Sollte $(\Phi(G), \langle \theta \rangle)$ keine Komponenten vom Typ ${}^2A_{2n}$ enthalten, so bewirken solche θ' auf G gerade die Automorphismen, die ein geeignetes Splitting von G stabilisieren.

Falls $(\Phi(G), \theta) = {}^2A_{2n}$ (vgl. Beispiel 2.19) kann man die θ' nur noch so charakterisieren: Sie stabilisieren ein "modifiziertes Splitting" $\mathbf{spl}'_G = (B, T, \{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta'})$, wobei Δ' eine maximale θ' -stabile echte Teilmenge von $\Delta_{ext} = \Delta \cup \{\tilde{\alpha}\}$ ist, so daß das Dynkindiagramm zu $P_I(\Delta')$ zusammenhängt. ($-\tilde{\alpha} = \alpha^+$ ist die höchste Wurzel in $\Phi^+(G, B)$.)

(3.7) Alle Elemente aus der Zusammenhangskomponente $\tilde{T} \cap L$ operieren auf T mit demselben Automorphismus $\theta_T \in \text{Aut}(T)$. Dann operiert θ_T auch auf der (absoluten) Weylgruppe $W = W(G, T) = \text{Norm}(T, G)/T$ und man kann

$$W^{\theta_T} = \{w \in W(G, T) \mid w \circ \theta_T = \theta_T \circ w\} = \{w \in W \mid w(T^{\theta_T}) = T^{\theta_T}\}$$

bilden. Indem man ein spezielles $\theta' \in \tilde{T} \cap L$ wählt, hat man (mit Steinberg 2.27)

$$\begin{aligned} W^{\theta'} &\simeq \text{Norm}(T^{\theta'^{\circ}}, G^{\theta'^{\circ}})/T^{\theta'^{\circ}} \simeq \text{Norm}(T^{\theta'}, G^{\theta'})/T^{\theta'} \\ &\simeq \text{Norm}(\tilde{T}, G)/T \simeq \text{Norm}(\tilde{T}, \tilde{G})/\tilde{T} \end{aligned}$$

(3.8) Die $G(\bar{F})$ -Konjugationsklasse eines fast halbeinfachen $g \in L$ schneidet einen maximalen Torus \tilde{T} (bzgl. $G\theta$), und zwar in einem $\text{Norm}(\tilde{T}, G)(\bar{F})$ -Orbit. Nach Wahl eines speziellen $\theta' \in \tilde{T} \cap L$ heißt das:

- Jede $G(\bar{F})$ -Konjugationsklasse eines fast halbeinfachen $g \in L$ hat einen Vertreter in $\tilde{T} \cap L = T \cdot \theta'$.
- Der Schnitt dieser Konjugationsklasse mit $T \cdot \theta'$ ergibt (via $t \cdot \theta' \mapsto (t \bmod (1 - \theta')T)$) genau einen $W^{\theta'}$ -Orbit in $T_{\theta'} := T/(1 - \theta')T$.

(3.9) Zu jedem Paar (B, T) gibt es genau einen maximalen Torus \tilde{T} bzgl. L , so daß $T = \tilde{T}^{\circ}$ und die von $\tilde{T} \cap L$ auf T induzierte Operation Θ_T auf den Wurzeln die Basis $\Delta(B, T)$ stabilisiert.

Um \tilde{T} zu konstruieren, ergänze (B, T) (irgendwie) zu einem Splitting und bezeichne die gesternte Aktion von L bzgl. dieses Splittings mit Θ^* . Dann ist $\tilde{T} := \text{Cent}(T^{\Theta^*}, \tilde{G})$. Dies ist unabhängig von der Wahl des Splittings, denn je zwei Splittings, die (B, T) enthalten, sind konjugiert über T .

Wenn (B, T) über F definiert ist, ist \tilde{T} auch über F definiert. Man ergänzt (B, T) dann zu einem F -Splitting, usw. (Diese Ergänzung geht, weil die additive Gruppe \mathbb{G}_a triviale Kohomologie hat.)

(3.10) Für einen Torus \tilde{T} bzgl. L gilt $\text{Cent}(\tilde{T}, \tilde{G}) = \text{Cent}(\tilde{T}, L) = \text{Cent}(\tilde{T})$.

(3.11) Sei θ ein fast halbeinfacher Automorphismus von G und (B', T') ein Paar in $G^{\theta^{\circ}}$. Dann existiert ein θ -stabiles Paar (B, T) in G mit $B' = B^{\theta^{\circ}}$ und $T' = T^{\theta^{\circ}}$, denn nach Lemma 3.2 ist $T = \text{Cent}(T', G)$ eindeutig bestimmt und indem man ein System S positiver Wurzeln in $P_I(\Phi(G, T))$ wählt, das $\Phi^+(G^{\theta^{\circ}}, B')$ umfaßt, hat man ein B gefunden: Das Erzeugnis von T und den unipotenten Gruppen U_{α} , für die $P_I(\alpha) \in S$.

Wenn θ speziell ist, ist das Paar (B, T) sogar eindeutig durch das Paar (B', T') bestimmt. Klarerweise ist umgekehrt $(B^{\theta^{\circ}}, T^{\theta^{\circ}})$ ein Paar in $G^{\theta^{\circ}}$, wenn (B, T) ein θ -stabiles Paar in G ist. Insbesondere existiert zu jedem θ -stabilen Torus T (von G) eine θ -stabile (\bar{F}) -Borelgruppe $B \supset T$.

Wenn θ ein (\bar{F}) -Splitting von G stabilisiert, gibt es darüberhinaus eine Bijektion zwischen den θ -stabilen Splittings von G und den Splittings von $G^{\theta^{\circ}}$: ($I := \langle \theta \rangle$)

$$(B, T, \{X_{\alpha}\}_{\alpha \in \Delta(G, B, T)}) \mapsto (B^{\theta^{\circ}}, T^{\theta^{\circ}}, \{X_{P_I(\alpha)} := \sum_{I\alpha} X_{\alpha}\}_{P_I(\alpha) \in P_I(\Delta)}).$$

Für die Umkehrabbildung bildet man zu einem Wurzelvektor $Y_\beta \in \mathfrak{g}_\beta \subset \bigoplus_{P_I(\alpha)=\beta} g_\alpha$ vermöge der Identifikation $\Phi(G^{\theta^\circ}) \subset \Phi_I$ die Menge $M_\beta := \{X_\alpha \mid Y_\beta = \sum_\alpha X_\alpha\}$. Wenn β die Basis zu B^{θ° durchläuft, so durchlaufen die α dabei (nach (2.5.3)) die Basis $\Delta(B)$. Mit Beispiel 2.18 bildet die Vereinigung der M_β mit $\beta \in \Delta(B^{\theta^\circ})$ die Wurzelvektoren eines θ -stabilen Splittings. Der Torus und die Borelgruppe dieses Splittings werden aus dem Paar von G^{θ° gewonnen wie eben beschrieben. Das definiert die Umkehrabbildung.

Behauptung 3.12. *Wenn Θ ein spezieller F -Automorphismus ist und ein F -Paar (B, T) stabilisiert, dann gibt es ein $t \in T(\bar{F})$, so daß $\Theta^* = \text{int} t \circ \Theta$ ein F -Splitting (B, T, \dots) stabilisiert und $\text{int} t \in T_{ad}(F)$ von der Ordnung 2 ist.*

Beweis: Man darf G einfach zusammenhängend annehmen und $\Phi = \Phi(G, T)$ irreduzibel. Nach Voraussetzung ist G^Θ quasisplit und hat (nach Steinberg 2.27) als Wurzelsystem ein maximales reduziertes Teilsystem von Φ_I .

Falls Θ ein Splitting stabilisiert, kann man, wie in (3.11) beschrieben, einem F -Splitting ein Θ -invariantes Splitting von G zuordnen. Daß dieses hochgehobene Splitting auch galoisstabil ist sieht man ganz analog wie die Θ -Stabilität.

Zu zeigen bleibt die Existenz eines Θ^* - und galoisstabilen Systems von Wurzelvektoren zu $\Delta = \Delta(G, B)$ in dem Fall: $\Phi = A_{2n}$ und Θ stabilisiert kein Splitting. (Vgl. Beispiel 2.19.) Dann ist $G = \text{Sl}(2n+1)$ oder $G = U(2n+1)$ und $G^\Theta = \text{Sp}(2 \cdot n)$.

Hier rechnet man nach, daß die Vereinigung von $\{P_I(\alpha) \mid \alpha \in \Delta \text{ vom Typ I}\}$ mit der Orbitsumme $S_{\alpha'}$ der beiden Wurzeln $\{\alpha', \Theta(\alpha')\} \subset \Delta$ vom Typ II eine Basis von G^Θ bzgl. (B^Θ, T^Θ) ergibt. Es gibt Wurzelvektoren $X_{\Theta^i \alpha'} \in \mathfrak{g}_{\Theta^i \alpha'}$ ($i \in \{0, 1\}$), so daß $X_{S_{\alpha'}} = [X_{\alpha'}, X_{\Theta \alpha'}]$. Umgekehrt werden so durch einen Wurzelvektor von G^Θ zu $S_{\alpha'}$ nach Wahl einer Reihenfolge innerhalb $\{\alpha', \Theta(\alpha')\}$ (d.h. nach Auszeichnen eines α') die beiden $X_{\Theta^i \alpha'}$ eindeutig festgelegt. Mit den Bezeichnungen aus (3.11) ist

$$M = \{\alpha', \Theta(\alpha')\} \cup \bigcup_{\beta \in \Phi_I^{\text{lang}} \cap \Phi_I^{\text{kurz}}} M_\beta$$

ein galoisstabiles System von Wurzelvektoren zu $\Delta(G, B)$.

Die Aussage über t folgt aus Steinbergs Satz 2.27 (bzw. genauer aus 2.18). \square

Definition 3.13 (Langlands, [KS99, 3.3]). *Die stabile Konjugationsklasse eines stark regulären, halbeinfachen Elements $g \in \tilde{G}(F)$ ist der Durchschnitt der $G(\bar{F})$ -Konjugationsklasse von g mit $\tilde{G}(F)$. Zwei maximale Tori \tilde{T}_1 und \tilde{T}_2 bzgl. L sind stabil konjugiert, wenn es ein $g \in G(\bar{F})$ gibt, so daß $\text{int} g : \tilde{T}_1 \xrightarrow{\sim} \tilde{T}_2$ über F definiert ist.*

Behauptung 3.14. *Seien stark reguläre $\delta_1, \delta_2 \in L(F)$ gegeben. Bezeichne $\tilde{T}_i := \text{Cent}(G^{\delta_i}, \tilde{G})$ und $\theta_i \in \tilde{T}_i \cap L$ zwei (gewählte) spezielle Elemente. Genau dann sind δ_1 und δ_2 stabil konjugiert (d.h. $G(\bar{F})$ -konjugiert), wenn*

(1) *Es existiert ein $g \in G(\bar{F})$, so daß \tilde{T}_1 und \tilde{T}_2 via $\text{int} g$ stabil konjugiert sind, und*

(2) wenn für $t_1, t_2 \in T_2$ mit der Eigenschaft $t_1\theta_2 = g\delta_1g^{-1} \in \tilde{T}_2$ bzw. $t_2\theta_2 = \delta_2$ gilt: Die Bilder von t_1 und t_2 liegen in einem $(W(T_2)^{\theta_2})^{\text{Gal}(\bar{F}/F)}$ -Orbit in $T_2/(1-\theta_2)T_2 =: (T_2)_{\theta_2}$. (Dabei ist $T_2 = (\tilde{T}_2)^\circ$).

Beweis: " \Rightarrow ": Für ein $g \in G(\bar{F})$ mit $g\delta_1g^{-1} = \delta_2$ gilt $g^{-1}g^\sigma \in G^{\delta_1}(\bar{F}) \subset \text{Cent}(\tilde{T}_1)$ für alle $\sigma \in \Gamma := \text{Gal}(\bar{F}/F)$. Daher ist $\text{int } g : \tilde{T}_1 \xrightarrow{\sim} \tilde{T}_2$ und diese Abbildung ist über F definiert. Sei nun o.E. $\delta_1 = t_1\theta$ und $\delta_2 = t_2\theta$ in demselben Torus $\tilde{T} := \tilde{T}_2 = \tilde{T}_1$ und $T := (\tilde{T})^\circ$. Dann ist $g \in \text{Norm}(\tilde{T}, G)$. Nach der Wahl eines speziellen $\theta \in \tilde{T} \cap L$, kann man nach Lemma 3.5.b g zerlegen in $g = t \cdot n(w)$ mit $t \in T(\bar{F})$ und einen Vertreter $n(w) \in \text{Norm}(T, G)^{\theta_T}(\bar{F})$ für $w \in W(T)^{\theta_T}$. Dabei gilt $w \in (W(T)^{\theta_T})^\Gamma$, denn $g^{-1}g^\sigma \in \text{Cent}(T_1)$ für alle $\sigma \in \Gamma$ (s.o.). Daher erhält man $w(t_1) = t_2t^{-1}t^{\theta_T}$.

" \Leftarrow ": Diese Richtung ist trivial: Wenn stark reguläre $\delta_1, \delta_2 \in L(F)$ gegeben sind, besagen (1) und (2), daß sie in einem $G(\bar{F})$ -Orbit liegen. \square

Definition von \mathfrak{G} , \mathfrak{D} , \mathfrak{E}

(3.15) Gegeben sei ein Referenz- F -Torus $\tilde{\mathbb{T}}$, maximal bzgl. L , der über einer Galois-erweiterung F'/F zerfällt.

Vorsicht: In diesem Kapitel wird von \mathbb{T} (ausnahmsweise) nicht gefordert, einen maximalen F -Splittorus zu enthalten. Ausnahmsweise wird auch nicht verlangt, daß F'/F unverzweigt ist. (Die Notation wurde so gewählt, daß das hier Dargestellte später doch hauptsächlich für unverzweigte maximale F -Torui \mathbb{T} , die einen maximalen F -Splittorus enthalten, benutzt wird.)

Bezeichne \mathbb{T} die Einskomponente von $\tilde{\mathbb{T}}$ und $\Theta_{\mathbb{T}}$ den von $L \cap \tilde{\mathbb{T}}$ bewirkten F -Automorphismus von \mathbb{T} bzw. $X_*(\mathbb{T})$, $\Phi, W := W(\mathbb{T}, G)$ usw. Man hat dann $\text{Cent}(\tilde{\mathbb{T}}) = \mathbb{T}^{\Theta_{\mathbb{T}}}$ und $\tilde{\mathbb{T}} = \text{Cent}(\mathbb{T}^{\Theta_{\mathbb{T}}}, \tilde{G}) = \text{Cent}(\mathbb{T}^{\Theta_{\mathbb{T}}^\circ}, \tilde{G})$. Sei $\Gamma = \text{Gal}(F'/F)$, $N(\tilde{\mathbb{T}}) := \text{Norm}(\tilde{\mathbb{T}}, G) = \text{Norm}(\mathbb{T}^{\Theta_{\mathbb{T}}^\circ}, G)$ und $W = W(G)$ die (absolute) Weylgruppe von G . Nach (3.7) hat man

$$(i) \quad 1 \longrightarrow \mathbb{T} \longrightarrow N(\tilde{\mathbb{T}}) \longrightarrow W^{\Theta_{\mathbb{T}}} \longrightarrow 1.$$

(3.16) Sei

$$\mathfrak{A}(\tilde{\mathbb{T}}, G, F') := \left\{ g \in G(F') \mid \forall \sigma \in \Gamma : g^{-1}\sigma(g) \in \mathbb{T}^{\Theta_{\mathbb{T}}}(F') \right\}.$$

Genau dann ist die Abbildung $\text{int } g : \tilde{\mathbb{T}} \xrightarrow{\sim} g\tilde{\mathbb{T}}g^{-1}$ galoisäquivalent, d.h. über F definiert, wenn $g \in \mathfrak{A}(\tilde{\mathbb{T}}, G, F')$.

Definition 3.17. Seien $\tilde{\mathbb{T}}$ und \tilde{T} maximale F -Tori bezüglich L und konjugiert über $G(F')$, d.h. es existiert ein $g \in G(F')$, so daß $\text{int } g : \tilde{\mathbb{T}} \rightarrow \tilde{T}$ ein Isomorphismus ist. Ferner seien $U_{\mathbb{T}} \subset \tilde{\mathbb{T}}(F)$ und $U_T \subset \tilde{T}(F)$ maximal kompakte Untergruppen von $\tilde{\mathbb{T}}(F)$ bzw. $\tilde{T}(F)$.

Man nennt $\tilde{\mathbb{T}}$ und \tilde{T}

- schwach stabil $G(F')$ -konjugiert, wenn man $g \in G(F')$ so wählen kann, daß $g^{-1}\sigma(g) \in \mathbb{T} := \tilde{\mathbb{T}}^\circ$ für alle $\sigma \in \Gamma$.

- *halbstabil $G(F')$ -konjugiert*, wenn man $g \in G(F')$ so wählen kann, daß es ein $t \in ((1 - \Theta_{\mathbb{T}})\mathbb{T})(F')$ gibt, so daß

$$(\sigma \mapsto g^{-1}\sigma(g), t) \in Z^1\left(\Gamma, \mathbb{T}(F') \xrightarrow{1-\Theta_{\mathbb{T}}} ((1 - \Theta_{\mathbb{T}})\mathbb{T})(F')\right)$$

- *stabil $G(F')$ -konjugiert*, wenn man $g \in G(F')$ so wählen kann, daß $g^{-1}\sigma(g) \in \mathbb{T}^{\Theta_{\mathbb{T}}} = \text{Cent}(\tilde{\mathbb{T}})$ für alle $\sigma \in \Gamma$.

Wenn dabei $(\text{int}g)(U_{\mathbb{T}}) = U_T$ werden $U_{\mathbb{T}}$ und U_T als schwach stabil bzw. halbstabil bzw. stabil $G(F')$ -konjugiert bezeichnet.

(3.18) Schwach stabil konjugiert sind $\tilde{\mathbb{T}}$ und \tilde{T} also genau dann, wenn ihre Einskomponenten \mathbb{T} bzw. T stabil konjugiert sind, d.h. $\text{int}g|_{\mathbb{T}}$ ist über F definiert. Halbstabile $G(F')$ -Konjugation bedeutet, daß erstens beide Tori ($\tilde{\mathbb{T}}$ und \tilde{T}) $G(F')$ -konjugiert sind, zweitens die Einskomponenten (\mathbb{T} und T) über $G(F')$ stabil konjugiert sind und drittens beide Tori ($\tilde{\mathbb{T}}$ und \tilde{T}) stabil konjugiert sind über $G(\bar{F})$! Klarerweise ist halbstabile $G(F')$ -Konjugation dasselbe wie stabile $G(F')$ -Konjugation, wenn F' algebraisch abgeschlossen ist. Ebenso fallen die Begriffe halbstabil und stabil zusammen, wenn $\text{Cent}(\tilde{\mathbb{T}}) = \mathbb{T}^{\Theta_{\mathbb{T}}}$ ein Torus ist und über F' zerfällt. Das sieht man, wenn man die Spektralsequenz zur Hyperkohomologie des 2-Komplexes $\mathbb{T}(F') \xrightarrow{1-\Theta_{\mathbb{T}}} (1 - \Theta_{\mathbb{T}})(\mathbb{T}(F'))$ benützt. Weil der Kokern dieser Abbildung verschwindet, hat man

$$H^1(\Gamma, \mathbb{T}^{\Theta_{\mathbb{T}}}(F')) \simeq H^1\left(\Gamma, \mathbb{T}(F') \xrightarrow{1-\Theta_{\mathbb{T}}} (1 - \Theta_{\mathbb{T}})(\mathbb{T}(F'))\right).$$

Falls $\mathbb{T}^{\Theta_{\mathbb{T}}}$ ein Torus ist, der über F' zerfällt, ist $H^1(F', \mathbb{T}^{\Theta_{\mathbb{T}}}) = 1$. Daher folgt mit der langen exakten Sequenz zu

$$1 \longrightarrow \mathbb{T}^{\Theta_{\mathbb{T}}} \longrightarrow \mathbb{T} \xrightarrow{1-\Theta_{\mathbb{T}}} (1 - \Theta_{\mathbb{T}})\mathbb{T} \longrightarrow 1,$$

daß $((1 - \Theta_{\mathbb{T}})\mathbb{T})(F') = (1 - \Theta_{\mathbb{T}})(\mathbb{T}(F'))$.

Nach Behauptung 2.13 ist z.B. $\mathbb{T}^{\Theta_{\mathbb{T}}}$ ein Torus, falls G halbeinfach und einfach zusammenhängend oder vom adjungierten Typ ist.

(3.19) Sei $\mathfrak{G}(\tilde{\mathbb{T}}, G, F')$ die Menge der $G(F)$ -Konjugationsklassen von F -Tori $[\tilde{T}]$ in der $G(F')$ -Konjugationsklasse von $\tilde{\mathbb{T}}$. Sie werden parametrisiert durch die Kohomologiemenge

$$\mathfrak{G}(\tilde{\mathbb{T}}, G, F') = \text{Kern} \left[H^1(\Gamma, N(\tilde{\mathbb{T}})(F')) \longrightarrow H^1(\Gamma, G(F')) \right].$$

Satz 3.20. *Wenn G halbeinfach ist, F'/F endlich unverzweigt ist, und ein $\theta^* \in \tilde{\mathbb{T}}(F') \cap L$ ein F -Splitting **spl** von G stabilisiert, werden die $G(F)$ -Konjugationsklassen $[\tilde{T}]$ innerhalb $\mathfrak{G}(\tilde{\mathbb{T}}, G, F')$ mit $\tilde{T}(F) \cap L \neq \emptyset$ parametrisiert durch*

$$\begin{aligned} & \text{Kern} \left[H^1(\Gamma, N(\tilde{\mathbb{T}})(F')) \longrightarrow H^1(\Gamma, G(F')) \right] \\ & \cap \text{Kern} \left[H^1(\Gamma, N(\tilde{\mathbb{T}})(F')) \xrightarrow{x \mapsto x \cdot \Theta^*(x)^{-1}} H^1(\Gamma_T, \mathbb{T}(F')) \right] \end{aligned}$$

Dabei bedeutet Γ_T die von T auf \mathbb{T} übertragene Galoisaktion.

Beweis: Sei $g \in G(F')$ so, daß $\text{int } g : \tilde{\mathbb{T}} \xrightarrow{\sim} \tilde{T}$. Genau dann ist $\tilde{T}(F) \cap L \neq \emptyset$, wenn es ein $t \in \mathbb{T}(F')$ gibt mit $gt\theta^*g^{-1} \in \tilde{T}(F)$. Dies ist äquivalent dazu, daß für (ein) $t \in \mathbb{T}(F')$ und alle $\sigma \in \Gamma = \text{Gal}(F'/F)$ gilt

$$\begin{aligned} & t = g^{-1}\sigma(g) \cdot \sigma(t) \cdot \sigma(\theta^*)\theta^{*-1} \cdot \text{int}\theta^*(\sigma(g)^{-1}g) \\ \iff & (w_\sigma \circ \sigma)(t)^{-1} \cdot t = z_{\text{spl}}(\sigma)^{-1} \cdot (1 - \Theta^*)(g^{-1}\sigma(g)), \end{aligned}$$

wobei $z_{\text{spl}}(\sigma) = \theta^*\sigma(\theta^*)^{-1} \in \text{Cent}(G)(F')$ und $w_\sigma = \text{int}(g^{-1}\sigma(g)) \in H^1(\Gamma, W^{\Theta^*})$ der Twist ist, mit dem man die Galoisaktion auf T nach \mathbb{T} überträgt. Weil G halbeinfach ist (es reicht, daß $\text{Cent}(G)(F')$ kompakt ist!) und $H^1(\Gamma, T(F')_c) = 1$, kann man $z_{\text{spl}}(\sigma)$ immer beranden in T . Daher darf man (nach Abändern von t) in der Formel oben o.E. $z_{\text{spl}}(\sigma) \equiv 1$ setzen.

Insgesamt ist dann die Klasse von $(\sigma \mapsto g^{-1}\sigma(g))$ in dem behaupteten Durchschnitt. \square

(3.21) Sei $\mathfrak{D}(\tilde{\mathbb{T}}, G, F') = \text{Kern} [H^1(\Gamma, \mathbb{T}^{\theta_{\mathbb{T}}}(F')) \longrightarrow H^1(\Gamma, G(F'))]$. Diese Menge parametrisiert die $G(F)$ -Konjugationsklassen in der $G(F')$ -Konjugationsklasse eines (beliebigen) stark regulären $t \in \tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L$. Denn für ein $g \in G(F')$ ist $t' := gtg^{-1}$ genau dann in $\tilde{G}(F)$, wenn der 1-Kozykel $a_g(\sigma) := g^{-1}\sigma(g)$ Werte in $\text{Cent}(\tilde{\mathbb{T}}, \mathbb{T})(F') = \mathbb{T}^{\theta_{\mathbb{T}}}(F')$ annimmt für alle $\sigma \in \Gamma$. Daher hat man eine Bijektion

$$\mathfrak{D}(\tilde{\mathbb{T}}, G, F') \xleftrightarrow{1-1} G(F) \setminus \mathfrak{A}(\tilde{\mathbb{T}}, G, F') / \mathbb{T}^{\theta_{\mathbb{T}}}(F').$$

Im Spezialfall, daß \mathbb{T} ein Torus bzgl. der Einskomponente G selbst ist, ergibt sich $\mathfrak{D}(\mathbb{T}, G, F') = \text{Kern} [H^1(\Gamma, \mathbb{T}(F')) \longrightarrow H^1(\Gamma, G(F'))]$.

(3.22) Sei

$$\mathfrak{D}_{\text{hyper}}(\tilde{\mathbb{T}}, G, F') = \text{Kern} \left[H^1(\Gamma, \mathbb{T}(F')) \xrightarrow{1-\Theta_{\mathbb{T}}} ((1-\Theta_{\mathbb{T}})\mathbb{T})(F') \longrightarrow H^1(\Gamma, G(F')) \right].$$

Dies ist das Bild von $H^1(\Gamma, \mathbb{T}_{sc}(F')) \xrightarrow{(1-\Theta_{\mathbb{T}}) \circ pr} ((1-\Theta_{\mathbb{T}})\mathbb{T})(F')$ in $H^1(\Gamma, \mathbb{T}(F')) \xrightarrow{1-\Theta_{\mathbb{T}}} ((1-\Theta_{\mathbb{T}})\mathbb{T})(F')$. In 5.15 wird gezeigt werden, daß diese Menge die $G(F)$ -Konjugationsklassen von stark regulären Elementen in $\tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L$ parametrisiert, die gemeinsam ein festes Element $\gamma \in H$ zum Norm-Image haben.

(3.23) Hier ist $\tilde{T} = g\tilde{\mathbb{T}}g^{-1}$ für ein $g \in G(F')$. Sei $\mathfrak{E}_{\text{schwach}}(\tilde{T}, G, F')$ die Menge der $G(F)$ -Konjugationsklassen von Tori in der schwach stabilen $G(F')$ -Konjugationsklasse von \tilde{T} . Dies ist die Menge aller $G(F)$ -Konjugationsklassen $[\tilde{T}']$ in $\mathfrak{G}(\tilde{\mathbb{T}}, G, F')$, die in $H^1(\Gamma, W^{\Theta_{\mathbb{T}}})$ dasselbe Bild haben wie $[\tilde{T}]$.

Die lange exakte Sequenz (nicht kommutativer Kohomologie) zur exakten Sequenz (i) in (3.15) ergibt das kommutative Diagramm (von Mengen mit Nullpunkt) mit exakten Zeilen und Spalten

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathfrak{D}(\mathbb{T}, G, F') & \rightarrow & \mathfrak{G}(\tilde{\mathbb{T}}, G, F') & \xrightarrow{\delta} & H^1(\Gamma, W^{\Theta_{\mathbb{T}}}) \\
 & & \cap & & \cap \\
 1 \rightarrow \mathbb{T}(F) \rightarrow N(\tilde{\mathbb{T}})(F) \rightarrow (W^{\Theta_{\mathbb{T}}})^{\Gamma} & \rightarrow & H^1(\Gamma, \mathbb{T}(F')) & \rightarrow & H^1(\Gamma, N(\tilde{\mathbb{T}})(F')) & \rightarrow & H^1(\Gamma, W^{\Theta_{\mathbb{T}}}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 & & H^1(\Gamma, G(F')) & = & H^1(\Gamma, G(F')) & &
 \end{array}$$

(Beachte, daß $\mathfrak{D}(\mathbb{T}, G, F')$ benutzt wird, nicht $\mathfrak{D}(\tilde{\mathbb{T}}, G, F')$.) Durch Twisten erhält man aus dem Diagramm die Fasern von δ (in $\mathfrak{E}(T, G, F')$) als das Bild von $\mathfrak{D}(T, G, F')$ in $\mathfrak{G}(\tilde{\mathbb{T}}, G, F')$. Analog zur Argumentation im \mathfrak{D} -Fall oben erhält man Bijektionen

$$\mathfrak{E}(\tilde{\mathbb{T}}, G, F') \xleftarrow{1-1} G(F) \setminus \mathfrak{A}(T, G, F') / \left(N(\tilde{T})(F') \cap \mathfrak{A}(T, G, F') \right)$$

(3.24) Wieder sei $\tilde{T} = \text{int}g(\tilde{\mathbb{T}})$ für ein $g \in G(F')$. Sei $\mathfrak{E}_{\text{halb}}(\tilde{T}, G, F')$ die Menge der $G(F)$ -Konjugationsklassen von Tori in der halb stabilen $G(F')$ -Konjugationsklasse von \tilde{T} . Dies ist die Menge aller $[\tilde{T}']$ aus $\mathfrak{G}(\tilde{\mathbb{T}}, G, F')$, die dasselbe Bild haben unter folgenden beiden Abbildungen

$$\begin{array}{ccc}
 H^1(\Gamma, N(\tilde{\mathbb{T}})(F')) & \longrightarrow & H^1(\Gamma, W^{\Theta^*}) \\
 H^1(\Gamma, N(\tilde{\mathbb{T}})(F')) & \xrightarrow{1-\Theta^*} & H^1(\Gamma_T, ((1-\Theta^*)\mathbb{T})(F')).
 \end{array}$$

Dabei bedeutet Γ_T die von T auf \mathbb{T} übertragene Galoisaktion. (Für diese getwistete Aktion ist die Wahl des Torus innerhalb einer schwach stabilen Konjugationsklasse unerheblich.)

(3.25) Hier ist wieder $\tilde{T} = \text{int}g(\tilde{\mathbb{T}})$ für ein $g \in G(F')$. Sei $\mathfrak{E}(\tilde{T}, G, F')$ die Menge der $G(F)$ -Konjugationsklassen von Tori in der stabilen $G(F')$ -Konjugationsklasse von \tilde{T} . Dies ist die Menge aller $[\tilde{T}']$ aus $\mathfrak{G}(\tilde{\mathbb{T}}, G, F')$, die dasselbe Bild haben unter den beiden Abbildungen

$$\begin{array}{ccc}
 H^1(\Gamma, N(\tilde{\mathbb{T}})(F')) & \longrightarrow & H^1(\Gamma, W^{\Theta^*}) \\
 H^1(\Gamma, N(\tilde{\mathbb{T}})(F')) & \xrightarrow{1-\Theta^*} & H^1(\Gamma_T, (1-\Theta^*)(\mathbb{T}(F'))).
 \end{array}$$

Wie in (3.24) bezeichnet dabei Γ_T die durch Twist von T auf \mathbb{T} übertragene Galoisaktion. Eine weitere Beschreibung ist

$$\mathfrak{E}(\tilde{T}, G, F') \xleftarrow{1-1} G(F) \setminus \mathfrak{A}(\tilde{T}, G, F') / \left(N(\tilde{T})(F') \cap \mathfrak{A}(\tilde{T}, G, F') \right).$$

Topologische Jordanzerlegung

Definition 3.26. Sei \mathbf{tJZ}_p die Kategorie, deren Objekte topologische Gruppen sind, für die der Umgebungsfiler der Eins eine Basis aus pro- p -Gruppen besitzt. Die Morphismen von \mathbf{tJZ}_p seien die stetigen Homomorphismen.

Definition 3.27. Ein Element g einer Gruppe G aus \mathbf{tJZ}_p heißt

- stark kompakt, falls g in einer kompakten Untergruppe von G liegt.
- topologisch unipotent, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} g^{p^n} = 1$.
- residuell halbeinfach, falls g von endlicher, zu p primärer Ordnung ist.

(3.28) Topologisch unipotent zu sein, heißt in einer pro- p -Gruppe zu liegen und man kann in der Definition statt der Folge (p^n) jede Folge $(p^{n_k})_k$ benutzen mit $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$.

Für den Fall $\tilde{G}(F)$ aus Beispiel 3.31 ist g genau dann stark kompakt, wenn die Menge $g^{\mathbb{Z}}$ beschränkt in $\tilde{G}(F)$ ist. Eine dritte äquivalente Formulierung ist, daß die Eigenwerte $\rho(g)$ Einheiten in \bar{F} sind bei einer/jeder (über \bar{F} definierten) treuen endlichdimensionalen Darstellung $\rho : G \rightarrow GL(V)$.

In pro- p -Gruppen läßt sich die \mathbb{Z} -Modulstruktur (über Potenzen) ausdehnen zu einer stetigen \mathbb{Z}_p -Modulstruktur (vgl. [Hasse, §15.2]).

Lemma 3.29 (topologische Jordanzerlegung). Sei G aus \mathbf{tJZ}_p . Jedes stark kompakte Element $g \in G$ besitzt eine Zerlegung:

$$g = g_u \cdot g_s = g_s \cdot g_u ,$$

bei der $g_u \in G$ topologisch unipotent und $g_s \in G$ residuell halbeinfach ist. Die topologische Jordanzerlegung ist eindeutig: Falls $g = g_u \cdot g_s = \tilde{g}_u \cdot \tilde{g}_s$ zwei topologische Jordanzerlegungen sind, gilt $g_u = \tilde{g}_u$ und $g_s = \tilde{g}_s$.

Beweis: Der Beweis wird geführt im Abschluß der Gruppe $\langle g^{\mathbb{Z}} \rangle$, die Untergruppe einer kompakten Gruppe in $G \in \mathbf{Ob}(\mathbf{tJZ}_p)$ ist. Der Abschluß ist kompakt und abelsch: Man hat nämlich $\overline{\langle g^{\mathbb{Z}} \rangle} = \langle g^{\mathbb{Z}_p} \rangle$. Wegen der Kompaktheit von $\overline{\langle g^{\mathbb{Z}} \rangle}$ existiert ein zu p teilerfremdes N , so daß g^N in einer pro- p -Gruppe U liegt. (Dies bilden ja einen Umgebungsfiler der Eins!) Weil $N^{-1} \in \mathbb{Z}_p$ und wegen der \mathbb{Z}_p -Modulstruktur von U , existiert eine (eindeutige) N -te Wurzel g_u von g^N in $\langle (g^N)^{\mathbb{Z}_p} \rangle \subset U$. Nach (3.28) ist g_u topologisch unipotent. Weil $\langle g_p^{\mathbb{Z}} \rangle$ abelsch ist, vertauschen g und g_u und es gilt für $g_s := g \cdot g_u^{-1} \in \langle g^{\mathbb{Z}_p} \rangle$ offensichtlich $g_s^N = g^N \cdot g^{-N} = 1$, d.h. g_s ist residuell halbeinfach. Als Element von $\langle g^{\mathbb{Z}_p} \rangle$ vertauscht auch g_s mit g und g_u .

Die Eindeutigkeit der topologischen Jordanzerlegung ergibt sich z.B. daraus, daß g_u unabhängig ist von N : Ist nämlich g^M in einer pro- p -Gruppe für ein $M \in \mathbb{N}$ (teilerfremd zu p), so teilt o.E. $N \mid M$. Dann ist oben $g^M \in \langle (g^N)^{\mathbb{Z}_p} \rangle \subset U$ und weil

auch M -tes Wurzelziehen in dieser Gruppe eindeutig ist, ist $g_u = (g^N)^a = (g^M)^b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}_p$, so daß $Na = 1 = Mb$. \square

Aus dem Beweis ergibt sich das

Korollar 3.30 (Eigenschaften der topologischen Jordanzerlegung).

- (1) Sei $g \in G$ stark kompakt und $N \in \mathbb{N}$ teilerfremd zu p , so daß g^N in einer pro- p -Gruppe liegt. Sei ferner Q eine p -Potenz mit $Q \equiv 1 \pmod{N}$. Dann gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g^{Q^m} = g_s.$$

- (2) Klarerweise ist $g_u \in G^{g_s}$ und man hat $G^g = \text{Cent}(g_u, G^{g_s})$.
 (3) Residuell halbeinfache Elemente sind halbeinfach.
 (4) Sei m teilerfremd zu p und seien u_1, u_2 topologisch unipotent. Dann gilt

$$u_1^m = u_2^m \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_2,$$

- (5) Die topologische Jordanzerlegung ist funktoriell in folgendem Sinn: Die kompakten (bzw. die topologisch unipotenten, bzw. die residuell halbeinfachen) Elemente definieren Funktoren von \mathbf{tJZ}_p nach \mathbf{Set} . Für jeden Morphismus φ von \mathbf{tJZ}_p ist $\varphi((\cdot)_s) = (\varphi(\cdot))_s$ und $\varphi((\cdot)_u) = (\varphi(\cdot))_u$.
 Insbesondere:

- (5a) Wenn H eine abgeschlossene Untergruppe von G ist und $g \in H$, so sind auch g_s und g_u aus H .

Beispiel 3.31. Sei F ein p -adischer Körper und \tilde{G} eine affine lineare algebraische Gruppe. Dann ist $\tilde{G}(F)$ ein Objekt in \mathbf{tJZ}_p . Es gibt eine Zahl N , so daß g^N topologisch unipotent ist, für alle stark kompakten $g \in \tilde{G}(F)$.

Beweis: Z.B. nach [Wa79, 3.4] hat \tilde{G} eine treue, (stetige) endlichdimensionale Darstellung $\rho : \tilde{G} \rightarrow GL(V)$ mit abgeschlossenem Bild. Die Eigenschaften von \mathbf{tJZ}_p vererben sich dadurch von $GL_n(F)$ auf $\tilde{G}(F)$. ($GL_n(F)$ wiederum erbt die geforderte Basis der Einsumgebungen als abgeschlossene Teilmenge von $\text{Mat}_{n \times n}(F) \times F \approx F^{n^2+1}$.) Jede kompakte Untergruppe von \tilde{G} liegt in einer maximalen (kompakten Untergruppe). Es gibt nun endlich viele Konjugationsklassen $[K_1], \dots, [K_l]$ von maximal kompakten Untergruppen. Die normalen pro- p -Untergruppen von K_i aus dem Umgebungsfiler der Eins haben endlichen Index in K_i . Sei N_i der zu p teilerfremde Anteil dieses Index. Dann kann man als N das kleinste gemeinsame Vielfache der N_i nehmen. \square

Korollar 3.32. Sei F ein p -adischer Körper und \tilde{G} eine reduktive Gruppe über F , so daß $|\pi_0(\tilde{G})|$ teilerfremd zu p ist. Jedes stark kompakte Element $g \in \tilde{G}(F)$ besitzt eine eindeutige topologische Jordanzerlegung:

$$g = g_u \cdot g_s = g_s \cdot g_u,$$

bei der $g_s \in \tilde{G}(F)$ residuell halbeinfach und $g_u \in (\tilde{G})^\circ(F)$ topologisch unipotent ist.

Aus der Funktorialität erhält man folgende Aussagen:

- (1) Sei $\rho : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ ein Morphismus (nicht zusammenhängender) reduktiver Gruppen, definiert über einer endlichen Erweiterung von F . Dann ist $\rho(g)_s = \rho(g_s)$ und $\rho(g)_u = \rho(g_u)$.
- (2) Wenn $g \in \tilde{G}(\mathcal{O}_F)$, dann ist das Bild der topologischen Jordanzerlegung unter der Reduktionsabbildung die Jordanzerlegung in $\tilde{G}(\mathbb{F}_q)$.

Denn $\tilde{G}(F)$ ist nach Beispiel 3.31 Objekt in \mathbf{tJZ}_p und wegen $p \nmid |\pi_0(\tilde{G})|$ müssen topologisch unipotente Elemente in $(\tilde{G})^\circ$ liegen.

Definition 3.33. Einen abelschen Charakter einer Gruppe aus \mathbf{tJZ}_p heißt unverzweigt bzw. zahm verzweigt, falls er trivial auf den stark kompakten bzw. topologisch unipotenten Elementen ist.

Langlandsdualität

(3.34) In [Lab84, 6.] und [Mil86, 8.6ff] wird folgende Version des Langlandschen Reziprozitätsgesetzes bewiesen: Sei T ein F -Torus, der über einer endlichen galoischen Erweiterung E (von F) zerfällt. Dann kommutiert

$$(ii) \quad \begin{array}{ccc} & \text{Hom}_c(E^\times, \hat{T}) & \\ \text{Cor} \swarrow & & \searrow \\ H_c^1(W_{E/F}, \hat{T}) & \xrightarrow{\text{rec}} & \text{Hom}_c(T(F), \mathbb{C}^\times) \end{array}$$

Dabei ist die horizontale Abbildung Langlands Reziprozitätsisomorphismus und die Abbildungen nach unten sind folgende Surjektionen: Die Rechte ist gegeben durch

$$(iii) \quad \begin{aligned} \text{Hom}_c(E^\times, \hat{T}) &= \text{Hom}_c(E^\times, \text{Hom}(X_*(T), \mathbb{C}^\times)) = \text{Hom}_c(E^\times \otimes X_*(T), \mathbb{C}^\times) \\ &= \text{Hom}_c(T(E), \mathbb{C}^\times) \twoheadrightarrow \text{Hom}_c(T(F), \mathbb{C}^\times) \end{aligned}$$

wobei $\Gamma = \text{Gal}(E/F)$ auf Homomorphismen χ durch $\sigma(\chi) = \sigma \circ \chi \circ \sigma^{-1}$ operiert und $\sigma(x \otimes \lambda) = \sigma(x) \otimes \sigma(\lambda)$.

Die linke Surjektion ist die Corestriktion $\text{Cor}_{E^\times}^{W_{E/F}}$ zur exakten Sequenz

$$1 \longrightarrow E^\times \longrightarrow W_{E/F} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1,$$

die nach Wahl eines Repräsentantensystems w_σ für $E^\times \backslash W_{E/F} \simeq \Gamma$ definiert wird durch

$$(iv) \quad (\text{Cor}_{E^\times}^{W_{E/F}} \varphi)(w) = \sum_{\sigma \in \Gamma} w_\tau(\varphi(w_\tau^{-1} w w_\sigma)) \in Z_c^1(W_{E/F}, \hat{T})$$

wobei $\tau \in \Gamma$ durch die Bedingung $w_\tau^{-1} w w_\sigma \in E^\times$ von σ und w abhängt.

(3.35) **Kompatibilität:** Im eindimensionalen Splitfall $T = \mathbb{G}_m$ ist das Bild eines $\lambda \in H_c^1(W_{E/F}, \mathbb{C}^\times) = \text{Hom}_c(W_{E/F}, \mathbb{C}^\times)$ unter rec gerade $\lambda \circ r_F$. (Die Bezeichnung r_F ist aus (1.1).)

(3.36) zahm verzweigte Charaktere: Die Reziprozitätsabbildung stiftet einen Isomorphismus

$$\mathrm{Cor}_{E^\times}^{W_{E/F}} \left(\mathrm{Hom}_{c, \mathrm{zahm}}(E^\times, \hat{T}) \right) \simeq \mathrm{Hom}_{c, \mathrm{zahm}}(T(F), \mathbb{C}^\times)$$

Das sieht man durch Inspektion der Abbildungsfolge (iii) in (3.34): Man hat $E^\times = \langle \pi_E \rangle \times \mu_E \times U_E^1$, wobei das Teichmüllersche Restsystem $\mu_E \simeq k_E^\times$ die residuell halbeinfachen Elemente in E^\times sind und die Einseinheiten $U_E^1 = 1 + \mathfrak{p}_E$ die topologisch unipotenten Elemente. Bei den Abbildungen in (iii) ist $T(E)_c$ topologisch isomorph zu $(X_*(T) \otimes U_E^1) \times (X_*(T) \otimes \mu_E)$, so daß $\mathrm{Hom}_{c, \mathrm{zahm}}(E^\times, \hat{T}) = \mathrm{Hom}_{c, \mathrm{zahm}}(T(E), \mathbb{C}^\times)$ klar ist. Daß die Restriktion $\mathrm{Hom}_{c, \mathrm{zahm}}(T(E), \mathbb{C}^\times) \rightarrow \mathrm{Hom}_{c, \mathrm{zahm}}(T(F), \mathbb{C}^\times)$ surjektiv ist, folgt ebenfalls aus der Zerlegung von $T(E)_c$, der Tatsache, daß $T(E)_{\mathrm{top. unipot.}} \cap T(F) = T(F)_{\mathrm{top. unipot.}}$ und der Injektivität von \mathbb{C}^\times .

(3.37) unverzweigte Charaktere: Sei E/F unverzweigt und $H_{c, \mathrm{unv}}^1(W_{E/F}, \hat{T})$ die Menge aller Klassen von $H_c^1(W_{E/F}, \hat{T})$, deren 1-Kozykel trivial auf den Einheiten \mathcal{O}_E^\times sind. (Weil E^\times trivial auf \hat{T} operiert, verhalten sich alle Kozykel einer Klasse gleich.) In [Lab84, Remarque 5.9] (oder [Bo79, 9.5]) wird gezeigt: Die Reziprozitätsabbildung stiftet einen Isomorphismus

$$H_{c, \mathrm{unv}}^1(W_{E/F}, \hat{T}) \simeq \mathrm{Hom}_{c, \mathrm{unv}}(T(F), \mathbb{C}^\times)$$

(3.38) Der Kern der beiden Surjektionen in (ii) ist nach [Lab84, 5.7+6.] genau $I_\Gamma(\mathrm{Hom}_c(E^\times, \hat{T}))$, wobei $I_\Gamma(A) = \{\sigma(a) - a \mid \sigma \in \Gamma, a \in A\}$ das Augmentationsideal ist. Daher erhält man überall in (ii) und (iii) Isomorphismen, wenn man von allen Gruppen $H_0(\cdot) = \cdot / I_\Gamma(\cdot)$ bildet.

Lemma 3.39. *Zerfällt der Torus T über einer endlichen unverzweigten Erweiterung F'/F , so ist $H^1(\mathrm{Gal}(F'/F), T(\mathcal{O}_{F'})) = 1$.*

Beweis: Ist z.B. in [PR94, Theorem 6.8]=Lemma 4.13 enthalten. \square

χ -Data

(3.40) In diesem Paragraphen ist Φ ein Wurzelsystem, auf dem die Galoisgruppe Γ einer endlichen galoischen Erweiterung E von F operiert. Eine Teilmenge von Φ heißt symmetrisch, wenn sie invariant ist unter $\alpha \mapsto -\alpha$. In [LS87, (2.6)] beweisen Langlands und Shelstad folgenden Satz

Satz 3.41 (Langlands [L79, Prop. 1]). *Sei $T \subset G$ ein maximaler F -Torus einer zusammenhängenden reductiven F -Gruppe G . Dann gibt es eine Einbettung $\xi : {}^L T \hookrightarrow {}^L G$ von L -Gruppen.*

Genauer wähle eine Borelgruppe $B \supset T$ von G und in Γ -stabiles Splitting $\mathrm{spl}_{\hat{G}}$ von \hat{G} . Dann hat man einen Isomorphismus $\hat{T} \simeq \mathcal{T}$ auf den Torus \mathcal{T} des Splittings.

Nach Wahl von χ -Data für $\Phi(G, T)$ (s.u.) läßt sich dieser Isomorphismus erweitern zu einer Einbettung $\xi : {}^L T \rightarrow {}^L G$ von L -Gruppen.

Die \hat{G} -Konjugationsklasse $\{\text{int } g \circ \xi \mid g \in \hat{G}\}$ von ξ ist unabhängig von B und dem Γ -stabilen Splitting von \hat{G} (hängt also nur von den χ -Data ab). Außerdem ist ξ bei fixiertem Isomorphismus $\hat{T} \simeq \mathcal{T}$, durch $\text{spl}_{\hat{G}}$ und die χ -Data eindeutig bis auf \mathcal{T} -Konjugation bestimmt.

Der Beweisgang für die Existenzaussage wird in (3.47) skizziert. Zuvor werden die nötigen Definitionen gegeben.

Definition 3.42 (χ -Data). Sei $R = -\Gamma\alpha \cup \Gamma\alpha \subset \Phi$ ein symmetrisierter Galoisorbit. Es seien F_+ bzw. F_{\pm} die Fixkörper von $\text{Stab}_{\{\alpha\}}(\Gamma) =: \Gamma_+$ bzw. $\text{Stab}_{\{\pm\alpha\}}(\Gamma) =: \Gamma_{\pm}$. Ein χ -Datum für die Galoisoperation auf R ist eine Menge $\{\chi_{\lambda} \mid \lambda \in R\}$, wobei

- (1) $\chi_{\alpha} \in \text{Hom}_c(F_+^{\times}, \mathbb{C}^{\times})$
- (2) $\chi_{-\lambda} = \chi_{\lambda}^{-1}$ und $\chi_{\sigma\lambda} = \chi_{\lambda} \circ \sigma^{-1}$ für alle $\sigma \in \Gamma$, $\lambda \in R$
- (3) Wenn $\Gamma_{\pm} \neq \Gamma_+$, d.h. $\Gamma \cdot \alpha$ ist symmetrisch und $|\Gamma_{\pm}/\Gamma_+| = 2$, dann ist χ_{α} eine Erweiterung des quadratischen Charakters von F_+/F_{\pm} . (Dies ist der einzige nicht triviale Charakter von $F_{\pm}^{\times}/\text{Norm}_{F_+/F_{\pm}}(F_+^{\times})$.)

Für die Γ -Aktion auf einer beliebige Γ -stabilen symmetrischen Teilmenge von Φ definiert man χ -Data als die Vereinigung der χ -Data auf den symmetrisierten Bahnen.

Eine Eichung auf einer Γ -stabilen symmetrischen Menge $R \subset \Phi$ ist eine Vorzeichenabbildung $p : R \mapsto \{\pm 1\}$ mit der Eigenschaft $p(-\alpha) = -p(\alpha)$ für alle $\alpha \in R$.

Behauptung 3.43. χ -Data für $-\Gamma\alpha \cup \Gamma\alpha$ existieren. Falls F_+/F_{\pm} unverzweigt (bzw. zahm verzweigt) ist, können die χ -Data unverzweigt (bzw. zahm verzweigt) gewählt werden.

Beweis: Falls $\Gamma_{\pm} = \Gamma_+$, d.h. $\Gamma\alpha$ asymmetrisch ist, wird (fast) nichts gefordert. Man kann zum Beispiel $\chi_{\lambda} \equiv 1$ für alle $\lambda \in \Gamma\alpha$ nehmen. Falls $\Gamma_{\pm} \neq \Gamma_+$ ergibt sich aus 3.42(2) genau eine Bedingung an $\chi_{\alpha} \in \text{Hom}_c(F_+^{\times}, \mathbb{C}^{\times})$: Es gibt nämlich ein $\tau \in \Gamma_{\pm}$, so daß $\tau\alpha = -\alpha$. Für dieses erzwingt die Bedingung (2) dann

$$\chi_{\alpha}^{-1} = \chi_{-\alpha} = \chi_{\tau\alpha} = \chi_{\alpha} \circ \tau^{-1} \in \text{Hom}_c(\tau(F_+^{\times}), \mathbb{C}^{\times}).$$

Weil Γ_+ Normalteiler vom Index zwei in Γ_{\pm} ist, ist $\tau(F_+^{\times}) = F_+^{\times}$. Es muß also für alle $x \in F_+^{\times}$ gelten: $1 = \chi_{\alpha}(x\tau^{-1}(x)) = \chi_{\alpha}(\text{Norm}_{F_+/F_{\pm}}(x))$. Diese Bedingung wird auch in (3) gefordert.

Daß diese Bedingung (3) in der verschärften Form der Behauptung erfüllbar ist, folgt aus der Injektivität von \mathbb{C}^{\times} , der Zerlegung $\mathcal{O}_{F_+}^{\times} = \mu_{F_+} \times U_{F_+}^1$ und den Tatsachen, daß bei unverzweigten (bzw. zahm verzweigten) Erweiterungen jedes kompakte (bzw. topologisch unipotente) Element von F_{\pm}^{\times} Norm ist und $\mathcal{O}_{F_+}^{\times} \cap F_{\pm}^{\times} = \mathcal{O}_{F_{\pm}}^{\times}$ (bzw. $U_{F_+}^1 \cap F_{\pm}^{\times} = U_{F_{\pm}}^1$).

□

Definition 3.44. Seien $\alpha \in \Phi$, $R = -\Gamma\alpha \cup \Gamma\alpha \subset \Phi$ und F_+ , F_\pm , Γ_\pm , Γ_+ wie in Definition 3.42. Wähle ein Repräsentantensystem R_+ für Γ/Γ_\pm . Dadurch erhält man eine Eichung p auf R , definiert durch

$$p(\lambda) = 1 \quad : \Longleftrightarrow \quad \lambda = \sigma\alpha \text{ für ein } \sigma \in R_+.$$

Wähle $\{w_\sigma \in W_{E/F} \mid w_\sigma \mapsto \sigma \in R_+\}$. Dann ist $\{w_\sigma\}$ ein Vertretersystem für $W_{E/F}/W_{E/F_\pm} \simeq \Gamma/\Gamma_\pm$. Wähle noch ein $v \in W_{E/F_+}$, das nicht in W_{E/F_\pm} liegt, falls $\Gamma_\pm \neq \Gamma_+$. Anderenfalls sei $v = 1$. Für $w \in W_{E/F}$ sei

$$r_{p,\alpha}(w) := \prod_{\tau \in R_+} \tau(\alpha) \otimes \left((\chi_\alpha \circ r_{F_+}^{-1})(w_\tau^{-1} w w_\sigma) \right) \in X^*(T) \otimes \mathbb{C}^\times = \hat{T},$$

wobei $w_\sigma \in \{w_\tau \mid \tau \in R_+\} \cup \{w_\tau \cdot v \mid \tau \in R_+\}$ festgelegt ist durch die Bedingung $w_\tau^{-1} w w_\sigma \in W_{E/F_+} (!)$ bei gegebenen w und τ .

Fakt 3.45 ([LS87, Lemmata 2.5.A+2.1.B]). Durch $r_{p,\alpha}$ wird eine 1-Kokette in $C^1(W_{E/F}, \hat{T})$ definiert. Sie ist bis auf Koränder unabhängig von den Wahlen von v , $\{w_\sigma\}$ und den Vertretern $\alpha \in R$ für die Γ -Orbiten. Für das Quadrat gilt $(r_p^\alpha)^2 \in Z^1(W_{E/F}, \hat{T})$.

Die $r_{p,\alpha}$ sind bisher nur für sehr spezielle Eichungen p definiert. (Nämlich für die von $\Gamma/\text{Stab}_{\{\pm\alpha\}}(\Gamma)$ induzierten Eichungen.) Um sie für allgemeine Eichungen zu verallgemeinern, führen [LS87, (2.4)] die folgende Übergangs-1-Kokette $s_{p/q}$ ein. Das unmittelbare Interesse der Autoren dürfte in [LS87] sein, r_p auf die durch einen Positivbereich $\Phi^+ \subset \Phi$ definierte Eichung $q(\alpha) = 1 : \Leftrightarrow \alpha \in \Phi^+$ zu übertragen. Das wird die Beweisskizze (3.47) unten zeigen.

Definition 3.46. Seien p und q zwei Eichungen auf einer Γ -stabilen symmetrischen Teilmenge $R \subset \Phi$. Dann sei für $\sigma \in \Gamma$

$$s_{q/p}(\sigma) := \prod_{\substack{\alpha \in \Phi \text{ mit} \\ q(\alpha)=1 \\ q(\sigma^{-1}\alpha)=-1 \\ p(\alpha)=p(\sigma^{-1}\alpha)=1}} \left(\alpha \otimes (-1) \right) \cdot \prod_{\substack{\alpha \in \Phi \text{ mit} \\ p(\alpha)=-1 \\ p(\sigma^{-1}\alpha)=1 \\ q(\alpha)=q(\sigma^{-1}\alpha)=1}} \left(\alpha \otimes (-1) \right) \in X^*(T) \otimes \mathbb{C}^\times = \hat{T}$$

(3.47) Beweisskizze der Existenzaussage von Satz 3.41: \hat{T} und \mathcal{T} sind identifiziert (so daß die B -positiven (Ko-)Wurzeln auf die \mathcal{B} -positiven Wurzeln von $\Phi(\mathcal{T}, \hat{G})$ gehen). Ein Element $\sigma \in \Gamma := \text{Gal}(\bar{F}/F)$ operiert auf \hat{T} durch eine Aktion, die mit σ_T bezeichnet wird. Durch die Identifikation $\hat{T} \simeq \mathcal{T}$ kann man diese Aktion in ${}^L G$ zerlegen

$$\sigma_T = \omega(\sigma_T) \circ \rho_G(\sigma_T) \in W(\mathcal{T}, \hat{G}) \rtimes \Gamma$$

in einen äußeren Anteil $\rho_G(\sigma)$ und einen Weylgruppenanteil $\omega(\sigma_T)$. Mit Hilfe des Steinbergrepräsentanten $n(\omega(\sigma_T)) \in \hat{G}_{der}$ kann man diesen Anteil nach \hat{G} liften. Die Abbildung $w \mapsto n(\omega(\sigma_T)) \rtimes w$ (wobei σ stets die Projektion von w in Γ ist) liefert

im Allgemeinen keinen Homomorphismus $W_F \rightarrow {}^L G$. Der Fehler wird gemessen in $H^2(W_F, \mathcal{T})$. Sei q die durch \mathcal{B} gegebene Eichung auf $\Phi = \Phi(G, T) = \Phi^\vee(\hat{G}, \mathcal{T})$: $q(\alpha) = 1 \iff \alpha > 0$. In [LS87, Lemma 2.1.A+B] wird der 2-Kozykel berechnet:

$$t_q(\sigma, \tilde{\sigma}) := n(\omega(\sigma_T)) \left(n(\omega(\tilde{\sigma}_T)) \right)^{\rho_G(\sigma)} n(\omega(\sigma_T \tilde{\sigma}_T))^{-1} = \prod_{\substack{\alpha \in \Phi \text{ mit} \\ q(\alpha)=1 \\ q(\sigma_T^{-1}\alpha)=-1 \\ q(\tilde{\sigma}_T^{-1}\sigma_T^{-1}\alpha)=1}} \alpha \otimes (-1) \in \mathcal{T}$$

und (in [LS87, Lemma 2.1.C]) gezeigt, daß die Klasse in $H^2(W_F, \mathcal{T})$ nicht von der Wahl der Eichung q abhängt. Genauer gilt (nach [LS87, Lemma 2.4.A]) in $Z^2(W_{E/F}, \mathcal{T})$

$$t_q \cdot t_p^{-1} = \partial_{s_{q/p}}.$$

für eine zweite Eichung p . (Damit darf man gewissermassen in jedem symmetrisierten Galoisorbit $-\Gamma\alpha \cup \Gamma\alpha$ von Φ ein eigenes "positives System von Wurzeln" wählen.)

Sei p eine Eichung, die auf jedem symmetrisierten Galoisorbit $R \subset \Phi$ von einem Vertretersystem R_+ produziert wird, wie in Definition 3.44 beschrieben. In [LS87, Lemma 2.5.A] rechnen Langlands und Shelstad nach, daß $t_p(\sigma, \tilde{\sigma})^{-1}$ Korand ist von

$$(v) \quad W_F \ni w \longmapsto r_p(w) := \prod_{\substack{\alpha \text{ aus Vertretersystem} \\ \text{für die symmetrisierten} \\ \Gamma\text{-Orbiten in } \Phi}} r_{p,\alpha}(w) \in \hat{T},$$

d.h. $t_p(\sigma, \tilde{\sigma})^{-1} = r_p(w)(r_p(\tilde{w}))^{\sigma_T} r_p(w\tilde{w})^{-1}$. (Hier gehen die χ -Data aus 3.42 ein!). Insgesamt ist somit durch

$$(vi) \quad w \longmapsto r_p(w) \cdot s_{q/p}(w) \cdot n(\omega(\sigma_T)) \rtimes w \quad \text{für } W_F \ni w \mapsto \sigma \quad \text{und} \quad \hat{T} \simeq \mathcal{T}$$

ein L -Homomorphismus ${}^L T \hookrightarrow {}^L G$ gegeben.

4 Das Gebäude

Sei F ein p -adischer Körper und G eine zusammenhängende halbeinfache Gruppe über F . Nur für diesen Fall wird das Gebäude gebraucht werden.

(4.1) Konstruktion des Gebäudes nach [BT72, 7.4] (vgl. auch [Ti79], [Lv96]):

1. Schritt: (Standard-) Apartment und N :

Wähle einen maximalen F -Splittorus S von G . Sei $N := \text{Norm}(S, G)$, $Z := \text{Cent}(S, G)$, $V := X_*(S) \otimes \mathbb{R}$, ${}_F\Phi := \Phi(S, G)$ das Wurzelsystem von S bzgl. G und sei U_α die zu $\alpha \in {}_F\Phi$ gehörende unipotente Untergruppe von G . Das Apartment $A = A(G, S, F)$ ist der affine Raum, dem V zugrunde liegt. Auf ihm operiert die Weylgruppe $W := W({}_F\Phi)$ zu ${}_F\Phi$ als Spiegelungsgruppe und $\mathbb{Z}[{}_F\Phi]^* \subset V$ durch Translationen. Man hat $W = N(F)/Z(F)$ und man kann diese Aktion liften zu einem Homomorphismus $\nu : N(F) \rightarrow \mathbb{Z}[{}_F\Phi]^* \rtimes W$, dessen Kern die maximal kompakte Untergruppe $Z(F)_c$ von $Z(F)$ ist. Das Bild von ν enthält $\mathbb{Z}[{}_F\Phi^\vee] \rtimes W$.

2. Schritt: Affine Wurzeln und U :

Für $\alpha \in {}_F\Phi$ und $1 \neq u \in U_\alpha(F)$ enthält die Menge $U_{-\alpha}(F) \cdot u \cdot U_{-\alpha}(F) \cap N(F)$ genau ein Element $m(u)$. Man hat $\nu(m(u)) = t_\alpha \circ s_\alpha$, wobei s_α die Spiegelung zu α ist und t_α eine Translation der Form $t_\alpha : v \mapsto v + l_\alpha(u)\alpha^\vee$ ist. Dies definiert eine Bewertungsfunktion $l_\alpha : U_\alpha(F) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei

$$U_{\alpha,k} := \{u \in U_\alpha(F) \setminus \{1\} \mid l_\alpha(u) \geq k\} \cup \{1\}.$$

Für $x \in A$ sei U_x die von allen $U_{\alpha, -\alpha(x)}$, $\alpha \in {}_F\Phi$ erzeugte Untergruppe von $G(F)$. Die affinen Wurzeln sind als Teilmenge der affinen Abbildungen $\text{Aff}(A, \mathbb{R})$ von A nach \mathbb{R} definiert

$${}_F\Phi_{aff} := \{\alpha + k \in \text{Aff}(A, \mathbb{R}) \mid \text{Es gibt ein } x \in U_\alpha(F) \text{ mit } k = l_\alpha(x)\}.$$

Sei $W_{aff} := W_{aff}({}_F\Phi_{aff})$ die Gruppe, die erzeugt wird von allen Spiegelungen $s_{\alpha+k}$ (an der Hyperebene $H_{\alpha,k} = \{v \in V \mid \alpha(v) + k = 0\}$!), für die $\alpha + k \in {}_F\Phi_{aff}$. Man hat $W_{aff} \triangleleft \text{Bild}(\nu)$, obwohl i.A. ${}_F\Phi$ kein Untersystem von ${}_F\Phi_{aff}$ sein muß.

Der lokale Index $\Delta({}_F\Phi_{aff})$ ist das Diagramm zu einer Basis des maximalen reduzierten Subsystems ${}_F\Phi_{aff}^{\text{kurz}} := \{\alpha \in {}_F\Phi_{aff} \mid \frac{1}{2}\alpha \notin {}_F\Phi_{aff}\}$. Es korrespondiert zu Kammerwänden des Komplexes zu W_{aff} auf A .

3. Schritt: Zusammenkleben von Apartments:

Das Gebäude zu $G(F)$ ist nun

$$(i) \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}(G, F) = (G(F) \times A) / \sim,$$

mit der Äquivalenzrelation \sim :

$$(i') \quad (g, x) \sim (\tilde{g}, \tilde{x}) \iff \text{Es gibt } n \in N(F) \text{ mit } \tilde{x} = \nu(n)x \text{ und } g^{-1}\tilde{g}n \in U_x,$$

wobei $N(F)$ via ν auf A operiert. Auf dem Gebäude operiert $G(F)$ durch die Vorschrift:

$$G(F) \times (G(F) \times A) \longrightarrow G(F) \times A \quad (h, (g, x)) \longmapsto (hg, x),$$

die sich auf die \sim -Klassen überträgt. Diese Aktion verallgemeinert die N -Aktion auf $A \hookrightarrow \mathcal{B}$ (via $x \mapsto (1, x)$). Ein **Apartment** in \mathcal{B} ist eine Teilmenge der Form gA .

Satz 4.2 ([Ti79, 2.1]). *Zu jeder reduktiven Gruppe G und zu jedem p -adischen Körper F existiert die obige Konstruktion des Gebäudes $\mathcal{B}(G_{\text{der}}, F)$. Sie ist unabhängig von der Wahl von S .*

Beweis: [BT72] und [BT84] oder [Lv96]. \square

(4.3) Weil U_x von $N(F)_x$ normalisiert wird, gilt für den Stabilisator eines Punktes $x \in A \subset \mathcal{B}$ offensichtlich $G(F)_x = U_x \cdot N(F)_x$. Daher kann man die Relation (i') (tautologisch) ersetzen durch

$$(i'') \quad (g, x) \sim (\tilde{g}, \tilde{x}) \iff \text{Es gibt } n \in N(F) \text{ mit } \tilde{x} = \nu(n)x \text{ und } g^{-1}\tilde{g}n \in G(F)_x,$$

(4.4) **Funktorialität des Gebäudes unter Galoiserweiterungen** ([Ti79, 2.6]):

Es gibt ein eindeutig bestimmtes System von Einbettung $i_{F'/F} : \mathcal{B}(G, F) \rightarrow \mathcal{B}(G, F')$ (F'/F eine Galoiserweiterung von F) mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $i_{F'/F}(\mathcal{B}(G, F)) \subset \mathcal{B}(G, F')^{\text{Gal}(F'/F)}$.
- (2) Die Restriktion von $i_{F'/F}$ auf jedes Apartment von $\mathcal{B}(G, F)$ ist eine affine Abbildung in ein Apartment von $\mathcal{B}(G, F')$.
- (3) $i_{F'/F}$ ist $G(F)$ -äquivariant.
- (4) Für zwei Galoiserweiterungen E/F' und F'/F gilt $i_{E/F} = i_{E/F'} \circ i_{F'/F}$.

Falls F'/F unverzweigt ist, gelten nach [Ti79, 2.6.1+1.10.1] folgende Verschärfungen:

- (1') $i_{F'/F}(\mathcal{B}(G, F)) = \mathcal{B}(G, F')^{\text{Gal}(F'/F)}$.
- (2') Ein Apartment A von $\mathcal{B}(G, F)$ ist der Schnitt eines $\text{Gal}(F'/F)$ -stabilen Apartments A' von $\mathcal{B}(G, F')$ mit $\mathcal{B}(G, F)$. Eine Facette in A ist der Schnitt einer $\text{Gal}(F'/F)$ -stabilen Facette in A' mit A .

Satz 4.5 ([Ti79, 3.4.1][Lv96, II.6.1]). *Sei G halbeinfach und Ω eine nichtleere beschränkte Teilmenge eines Apartments von $\mathcal{B}(G, F)$.*

- (a) *Bis auf eindeutigen Isomorphismus gibt es ein eindeutig bestimmtes glattes, zusammenhängendes, affines \mathcal{O}_F -Gruppenschema \mathcal{G} von endlichem Typ, so daß gilt*

- Die generische Faser ist $\mathcal{G} \times_{\mathcal{O}_F} F = G$.
- Für jede unverzweigte Erweiterung F' von F mit Bewertungsring $\mathcal{O}_{F'}$ gilt $\mathcal{G}(\mathcal{O}_{F'}) = G(F')_{\Omega} \stackrel{\text{Def}}{=} \text{Fix}_{i_{F'/F}(\Omega)}(G(F'))$.

(b) Wenn G quasisplit ist, d.h. $Z =: \mathbb{T}$ ein Torus ist, der in einer F -Borelgruppe \mathbb{B} liegt, dann kann jede der Inklusionen $\mathbb{T} \hookrightarrow G$, $\mathbb{B} \hookrightarrow G$ und $U_{\alpha} \hookrightarrow G$ (für $\alpha \in {}_F\Phi^{\text{kurz}}$) ausgedehnt werden zu Isomorphismen von \mathcal{O}_F -Gruppenschemata \mathcal{T} bzw. \mathcal{B} bzw. \mathcal{U}_{α} auf abgeschlossene \mathcal{O}_F -Unterschemata von \mathcal{G} . (Die Schemata \mathcal{T} , ... sind charakterisiert durch $\mathcal{T}(\mathcal{O}_{F'}) = \mathbb{T}(F')_{\Omega}$,)

Definition 4.6. Ein Punkt $x \in \mathcal{B}(G, F)$ heißt hyperspeziell, wenn es eine unverzweigte Erweiterung F'/F gibt, so daß $i_{F'/F}(x) \in \mathcal{B}(G, F')$ eine Ecke mit folgender Eigenschaft ist: Für ein Apartment $A' \ni i_{F'/F}(x)$ von $\mathcal{B}(G, F')$ mit den Wänden $H_{\alpha, k}$ für alle $\alpha + k \in {}_{F'}\Phi_{\text{aff}}$ (wie in 4.1 beschrieben) gilt

$${}_{F'}\Phi \simeq \{\alpha \mid \exists k \text{ mit } i_{F'/F}(x) \in H_{\alpha, k} \text{ und } \alpha + k \in {}_{F'}\Phi_{\text{aff}}\}.$$

Faktensammlung

Es folgt eine Auswahl von Aussagen der Theorie, die sich auf das beschränkt, was (in der Folge) benötigt wird. **Ab jetzt sei G halbeinfach, quasisplit und $\mathbb{T} := \text{Cent}(S, G)$, d.h. $S = \mathbb{T}_{sp}$.**

Lemma 4.7. Sei G halbeinfach, quasisplit, über F definiert und $f : G' \rightarrow G$ eine über F definierte, zentrale Isogenie. (Zentral heißt, daß $\text{Kern}(f)$ im Zentrum von G' liegt.)

Dann ist $\mathcal{B}(G', F)$ kanonisch isomorph zu $\mathcal{B}(G, F)$. Dieser Isomorphismus ist funktoriell bei Galoiserweiterungen von F .

Mangels Referenz folgt hier ein Beweis: O.E.d.A. darf man annehmen, daß $G' = G_{sc}$ einfach zusammenhängt. Sei $S \subset G$ das Bild eines maximalen F -Splittorus S_{sc} in G_{sc} und $\mathbb{T} = \text{Cent}(S, G)$ bzw. $\mathbb{T}_{sc} := \text{Cent}(S_{sc}, G_{sc})$ ihre Zentralisatoren. Da f über F definiert ist, ist S ein maximaler F -Splittorus. Weil das Bild von $X_*(S_{sc})$ in $X_*(S)$ endlichen Index hat, kann man das Apartment zu S_{sc} mit dem zu S (kanonisch) identifizieren. Betrachte die Abbildung

$$(ii) \quad G(F)_{sc} \times A \longrightarrow G(F) \times A \quad (g, x) \longmapsto (f(g), x).$$

Sie verträgt sich mit den \sim -Klassen (weil $\text{Kern } f \subset \text{Cent}(G) \subset \text{Kern } \nu$.)

Sei F' ein galoischer Zerfällungskörper und $\Gamma := \text{Gal}(F'/F)$. Weil G_{sc} quasisplit ist, ist \mathbb{T}_{sc} ein (maximaler) Torus und Γ stabilisiert ein (geeignetes) System einfacher Wurzeln $\Delta = \Delta(\mathbb{T}_{sc}, G_{sc})$. Daher ist $X_*(\mathbb{T}_{sc}) = \mathbb{Z}[\Phi^{\vee}] = \bigoplus_{\Gamma\alpha \subset \Delta} \text{Ind}_{\Gamma\alpha}^{\Gamma} \mathbb{Z}\alpha^{\vee}$, wobei Γ_{α} den Fixator von α in Γ bezeichnet. Man hat

$$H^1(F, \mathbb{T}_{sc}) \simeq H^1(\Gamma, \mathbb{T}_{sc}(F')) \simeq H^1(\Gamma, X_*(\mathbb{T}_{sc})) \simeq \bigoplus_{\Gamma\alpha \subset \Delta} H^1(\Gamma_{\alpha}, \mathbb{Z}\alpha^{\vee}) = 1.$$

Die erste Isomorphie folgt mit Hochschild–Serre und Hilbert 90, die zweite mit Tate–Nakayama und die dritte mit Shapiros Lemma. Deswegen ist $\mathbb{T}(F)/f(\mathbb{T}_{sc}(F)) \simeq H^1(\Gamma, \text{Kern}(f)) \simeq G(F)/f(G_{sc}(F))$ und zu jedem $g \in G(F)$ existiert ein $t \in \mathbb{T}(F)$, so daß $gt \in f(G_{sc}(F))$. Durch eine einfache Rechnung sieht man damit, daß die Abbildung (ii) eine Bijektion auf den \sim -Klassen bewirkt. (Man benutzt natürlich, daß $(g, x) \sim (gt^{-1}, tx)$ für $t \in \mathbb{T}(F) \subset N(F)$.) Diese Abbildung ist offensichtlich kanonisch und funktoriell. (D.h. genauso kanonisch, wie das Gebäude.) \square

Fakt 4.8 ([Ti79, 3.5.2]). *Wenn G halbeinfach und einfach zusammenhängend ist, ist die Gruppe $\overline{G} = \overline{G}(\Omega)$, die man aus $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\Omega)$ durch Reduktion mod \mathfrak{p} erhält, zusammenhängend. Die Wurzeln von \overline{G} sind die $\alpha \in \Phi(G)$, für die es ein k gibt, so daß $\alpha + k \in {}_F\Phi_{aff}$ und $\alpha(x) = -k$ für alle $x \in \Omega$.*

Definition 4.9. *Sei $x \in \mathcal{B}(G, F)$ hyperspeziell und $\overline{G}_{sc} := \overline{G}_{sc}(x)$ die Reduktion mod p (wie in 4.8). Ein residuell halbeinfaches Element $g \in \tilde{G}(F)_x$ wird stark regulär mod p genannt, wenn die Fixpunktmenge von intg bei der Reduktion mod p auf \overline{G}_{sc} eine abelsche Untergruppe (von \overline{G}_{sc}) ist.*

Fakt 4.10 ([Ti79, 3.6.1]). *Sei*

$$M \subset \mathbb{T}_{sp}(F)_c := \{s \in \mathbb{T}_{sp}(F) \mid \text{val}_F(\chi(s)) = 0 \text{ für alle } \chi \in X^*(\mathbb{T}_{sp})\}$$

eine Teilmenge, so daß für alle $\alpha \in {}_F\Phi$ ein $m_\alpha \in M$ existiert mit $\alpha(m_\alpha) \notin 1 + \mathfrak{p}_F$. Dann ist die Fixpunktmenge $\mathcal{B}(G, F)^M$ das Apartment $A(G, \mathbb{T}_{sp}, F)$ zu \mathbb{T}_{sp} . Falls $p > 2$, ist $A = A(G, \mathbb{T}_{sp}, F)$ die Fixpunktmenge von $\mathbb{T}_{sp}(F)_c$.

Fakt 4.11 ([Ti79, 1.3]). *Falls G über einer unverzweigten Erweiterung F'/F zerfällt, ist $\nu(\text{Norm}(\mathbb{T}_{sp}, G)(F)) = X_*(\mathbb{T}_{sp}) \rtimes W({}_F\Phi) = X_*(\mathbb{T})^\Gamma \rtimes W(\mathbb{T})^\Gamma$, wobei $\Gamma := \text{Gal}(F'/F)$.*

Fakt 4.12 (Iwasawazerlegung [BT72, (7.3.1+2)]). *Sei $x \in A$ ein spezieller Punkt (vgl. Definition 2.37) im Apartment zu \mathbb{T}_{sp} . Dann ist*

$$G(F) = \mathbb{B}(F) \cdot G(F)_x.$$

Lemma 4.13. *Sei G reduktiv, F' ein unverzweigter Zerfällungskörper von G und $x \in A^{\text{Gal}(F'/F)}$. Dann ist*

$$H^1(F'/F, G(F')_x) = 1.$$

Beweis: [PR94, Theorem 6.8] \square

Definition 4.14. *Sei G unverzweigt und $x \in \mathcal{B}(G, F)$ hyperspeziell. Ein F -Splitting $(\mathbb{B}, \mathbb{T}, \{\mathcal{X}_\alpha\})$ wird von \overline{G} bzgl. x geliftet genannt, wenn seine Reduktion mod \mathfrak{p} ein Splitting von $\overline{G} = \overline{G}(x)$ ist.*

Genauer gibt es unter den Voraussetzungen der Definition in $\mathcal{G} = \mathcal{G}(x)$ aus 4.5 Untergruppenschemata \mathcal{B} , \mathcal{T} und Morphismen von $\text{Spec}(\mathcal{O}_{F'}[X]) \rightarrow \mathcal{U}_\alpha \times_F F'$ für geeignete unverzweigte endliche Erweiterung F'/F , deren Spezialisierungen zum einen das F -Splitting ergibt und zum anderen ein $\kappa(F)$ -Splitting von $\overline{G}(x)$. Diese F -Splittings werden als bzgl. x geliftet bezeichnet.

Behauptung 4.15. *Sei $\text{spl}(\mathbb{B}, \mathbb{T}, \{X_\alpha\})$ ein F -Splitting, das bezüglich eines hyperspeziellen Punktes $x \in A(G, \mathbb{T}_{sp}, F) \subset \mathcal{B}(G, F)$ geliftet ist. Weiter sei F'/F eine endliche unverzweigte Erweiterung, die G zerfällt.*

(a) *Dann fixiert $\Theta^* \in \text{Aut}(G, \text{spl})$ den Punkt x .*

(b) *Die Steinbergrepräsentanten in $G_{sc}(F')$ der Weylgruppe $W(\mathbb{T})$ liegen in $G_{sc}(F')_x$.*

Beweis: (a) ist klar und (b) folgt daraus, daß $n(s_\alpha) = m(u)$ für geeignete $u \in \{u \in U_\alpha \mid l_\alpha(u) = \alpha(x)\}$ in den Bezeichnungen von (4.1). Genauer hat man (mit der Bezeichnung aus dem Beweis von 2.7) $n(X_\alpha) = m(\exp(-X_{-\alpha}))$. \square

(4.16) Markierung von \mathcal{B} und Definition von $\Xi(G, F)$: Indem man die Ecken eines Alkovens im Gebäude durchnumeriert (oder irgendwie bezeichnet) definiert man eine Markierung aller Ecken des Gebäudes, bei der zwei Ecken dieselbe Markierung (bzw. Numerierung) haben, wenn sie in einem Orbit unter der Operation von $G_{ad}(F)$ liegen.

Die Ecken eines Alkovens korrespondieren zu Punkten im lokalen affinen Dynkin-diagramm $\Delta({}_F\Phi_{aff}(G))$. Dadurch ergibt sich nach [Ti79, 2.5] aus der Operation von $G(F)$ auf dem Gebäude eine Operation von $G(F)$ auf $\Delta({}_F\Phi_{aff})$. Ihr Bild in $\text{Aut}(\Delta({}_F\Phi_{aff}))$ wird wie in [Ti79] mit $\Xi(G, F)$ bezeichnet.

Sei weiterhin G halbeinfach und quasisplit und $\mathbb{T} := \text{Cent}(S, G)$. Sei S_{sc} (bzw. \mathbb{T}_{sc}) der Urbildtorus von $S \cap G_{der}$ (bzw. $\mathbb{T} \cap G_{der}$) unter $G_{sc} \rightarrow G$. In [Ti79, 2.5] wird $\Xi(G, F)$ berechnet als

$$\Xi(G, F) = \mathbb{T}(F) / \mathbb{T}(F)_c \cdot \text{Bild}[\mathbb{T}_{sc}(F) \rightarrow \mathbb{T}(F)]$$

Tits Gebäude mit Twists

(4.17) Sei G unverzweigt und halbeinfach, F' ein unverzweigter Zerfällungskörper (endlich über F). Man nimmt hier $\text{char}(\kappa(F)) > 2$ an. Sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G, F)$ und Θ ein spezieller F -Automorphismus von G , der ein F -Paar (\mathbb{B}, \mathbb{T}) stabilisiert. In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die Fixpunktmenge \mathcal{B}^Θ das Gebäude zu $G(F)^\Theta = G^\Theta(F)$ ist.

Θ stabilisiert das Apartment $A = A(G, \mathbb{T}_{sp}, F)$, und nach Wahl einer (hyperspeziellen) " $0 \in A^\Theta$ " die durch \mathbb{B} bestimmte Kammer C (mit $0 \in \overline{C}$). Sei $\mathbb{U} = \langle U_\alpha \mid \alpha > 0 \rangle$ das unipotente Radikal von \mathbb{B} .

(4.18) Die Operation von Θ auf A kann zu einem Automorphismus (von Kammerkomplexen) ausgedehnt werden auf ganz \mathcal{B} durch

$$\Theta(g, x) := (\Theta(g), \Theta(x)),$$

denn dabei werden \sim -Klassen respektiert: Dafür muß man $\Theta(U_x) = U_{\Theta(x)}$ zeigen. Wenn man den zweiten Schritt der Konstruktion (4.1) des Gebäudes durchgeht, sieht man $\Theta(m_\alpha(u)) = m_{\Theta\alpha}(\Theta(u))$ und damit sogar $l_\alpha(u) = l_{\Theta\alpha}(\Theta(u))$. Wegen $\alpha(x) = (\Theta\alpha)(\Theta(x))$ folgt $\Theta(U_{\alpha, -\alpha(x)}) = U_{\Theta\alpha, -(\Theta\alpha)(\Theta(x))}$ und daraus $\Theta(U_x) = U_{\Theta(x)}$.

Fakt 4.19 (gemischte Iwasawazerlegung [BT72, (7.3.1)]). *Sei $x \in A$. Dann ist*

$$G(F) = \mathbb{U}(F) \cdot N(F) \cdot G(F)_x$$

und man hat eine Bijektion

$$\begin{aligned} \mathbb{U}(F) \backslash G(F) / G(F)_x &\xrightarrow{1-1} \nu(N(F) / N(F)_x) \\ \mathbb{U}(F) \cdot n \cdot G(F)_x &\longmapsto \nu(n \cdot N(F)_x). \end{aligned}$$

Lemma 4.20. *Seien G, Θ, A, \dots wie in (4.17) und $x \in A^\Theta$. Dann ist*

$$H^1(\langle \Theta \rangle, \mathbb{U}(F)_x) \hookrightarrow H^1(\langle \Theta \rangle, \mathbb{U}(F)).$$

Beweis: O.E. sei ${}_F\Phi = \Phi(\mathbb{T}_{sp}, G)$ irreduzibel. Man lege eine Reihenfolge für die Wurzeln aus ${}_F\Phi^+ = \Phi(\mathbb{T}_{sp}, G)^+$ fest, so daß die Höhen der Wurzeln bzgl. ${}_F\Phi^+$ mit der Numerierung anwächst. Nach [Ti79, 3.1] hat man Bijektionen ($|{}_F\Phi^+| =: m$)

$$\begin{array}{ccc} U_{\alpha_1}(F) \times \dots \times U_{\alpha_m}(F) & \longrightarrow & \mathbb{U}(F) \\ \left(\begin{array}{c} u_1 \quad , \quad \dots \quad , \quad u_m \end{array} \right) & \longmapsto & u_1 \cdots u_m \\ U_{\alpha_1, \alpha_1(x)} \times \dots \times U_{\alpha_m, \alpha_m(x)} & \longrightarrow & \mathbb{U}(F)_x \end{array}$$

Man beweist das Lemma über Induktion nach der Höhe (in ${}_F\Phi^+$), indem man im i -ten Schritt modulo $U_i := \langle U_\alpha(F) \mid \text{Höhe}(\alpha) > i \rangle$ rechnet. Der Automorphismus Θ respektiert die Filtrierung von $\mathbb{U}(F)$ durch die U_i und U_i/U_{i+1} ist abelsch. Nach (4.18) ist $\Theta(U_{\alpha, \alpha(x)}) = U_{\Theta\alpha, (\Theta\alpha)(x)}$. Es genügt also

$$\begin{aligned} &\text{Kern}[H^1(I, \prod_{\gamma \in I\alpha} U_{\gamma, \gamma(x)}) \longrightarrow H^1(I, \prod_{\gamma \in I\alpha} U_\gamma(F))] \\ \text{(iii)} \quad &\stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} \text{Kern}[H^1(I_\alpha, U_{\alpha, \alpha(x)}) \longrightarrow H^1(I_\alpha, U_\alpha(F))], \end{aligned}$$

zu berechnen, wobei $I_\alpha = \text{Stab}_\alpha(I)$ und $I = \langle \Theta \rangle$.

Splitfall: Wenn G über F zerfällt, ist $U_\alpha(F) \simeq F$ eindimensional und $U_{\alpha, \alpha(x)}$ wird dabei auf $a \cdot \mathcal{O}_F$ abgebildet für ein geeignetes $a \in F^\times$. Aus Lemma 2.9 und der

Beschreibung der speziellen Automorphismen in Behauptung 3.12 folgt, daß $\sigma \in I_\alpha$ auf $U_\alpha(F) \simeq F$ durch ± 1 operiert. Weil $p = \text{char}(\kappa(F)) > 2$ ist (trivialerweise)

$$0 \longrightarrow (a\mathcal{O}_F)^\Theta \longrightarrow F^\Theta \longrightarrow (F/a\mathcal{O}_F)^\Theta \longrightarrow 0.$$

Daraus folgt, daß der Kern in (iii) trivial ist.

Allgemeiner (Quasisplit-) Fall: Sei F' ein Zerfällungskörper von G , unverzweigt und endlich über F , und Fr ein Erzeuger der Galoisgruppe $\Gamma = \text{Gal}(F'/F)$. Durch die Inklusion $(\prod_{\alpha \in \Phi, \text{Höhe}(\alpha)=i} U_\alpha(F')) \rightarrow G(F')$ werden die Galoisaktion von $G(F')$ auf das direkte Produkt zurückgezogen.

Sei $\alpha_1 \in \Phi = \Phi(\mathbb{T}, G)$ eine Wurzel, die sich restringiert zu der Wurzel $\alpha = \alpha_1|_{\mathbb{T}_{sp}} \in {}_F\Phi$, die in (iii) betrachtet wird. Bezeichne $\mathcal{O}_1 = (I \times \Gamma) \cdot \alpha_1$ den Galois- und Θ -Orbit von α_1 . Alle $\gamma \in \mathcal{O}_1$ haben dieselbe Höhe, weil sowohl Θ als auch Γ (die Höhen in \mathbb{B} stabilisieren).

Soeben wurde die Exaktheit der Sequenz

$$1 \rightarrow \left(\prod_{\gamma \in \mathcal{O}_1} U_\gamma(F')_x \right)^\Theta \rightarrow \left(\prod_{\gamma \in \mathcal{O}_1} U_\gamma(F') \right)^\Theta \rightarrow \left(\prod_{\gamma \in \mathcal{O}_1} U_\gamma(F')/U_\gamma(F')_x \right)^\Theta \rightarrow 1$$

bewiesen. Weil Θ über F definiert ist, folgt daraus die Exaktheit von

$$\dots \rightarrow \left(\prod_{\gamma \in \mathcal{O}_1} U_\gamma(F') \right)^{I \times \Gamma} \rightarrow \left(\prod_{\gamma \in \mathcal{O}_1} U_\gamma(F')/U_\gamma(F')_x \right)^{I \times \Gamma} \rightarrow H^1\left(\Gamma, \left(\prod_{\gamma \in \mathcal{O}_1} U_\gamma(F')_x \right)^\Theta\right).$$

Nach Shapiros Lemma gilt (mit $\Gamma_{\alpha_1} = \text{Stab}_{\alpha_1}(\Gamma)$)

$$H^1\left(\Gamma, \left(\prod_{\gamma \in \mathcal{O}_1} U_\gamma(F')_x \right)^\Theta\right) \simeq H^1\left(\Gamma_{\alpha_1}, \left(\prod_{\gamma \in I\alpha_1} U_\gamma(F')_x \right)^\Theta\right) \simeq H^1(\Gamma_{\alpha_1}, \mathcal{O}_{F'})$$

Bei dieser Identifikation operiert der Erzeuger der zyklischen Gruppe Γ_{α_1} durch $\pm\sigma$ für ein geeignetes Element $\sigma \in \text{Gal}(F'/F)$. (Das folgt unter erneuter Verwendung von 2.9 und 3.12.) Man kann zeigen, daß daher diese Kohomologiegruppe verschwindet, und erhält die Surjektion

$$\begin{array}{ccc} \left(\prod_{\gamma \in \mathcal{O}_1} U_\gamma(F') \right)^{\Gamma \times I} & \twoheadrightarrow & \left(\prod_{\gamma \in \mathcal{O}_1} U_\gamma(F')/U_\gamma(F')_x \right)^{I \times \Gamma} \\ \parallel & & \uparrow \\ \left(\prod_{\gamma \in I\alpha} U_\gamma(F) \right)^\Theta & \longrightarrow & \left(\prod_{\gamma \in I\alpha} U_\gamma(F)/U_\gamma(F)_x \right)^\Theta \end{array}$$

Weil die untere Abbildung dadurch surjektiv wird, ist der Kern in (iii) auch in diesem Fall trivial. \square

Satz 4.21. *Wie in (4.17) sei G halbeinfach, unverzweigt und zerfalle über der unverzweigten Erweiterung F' und $\Theta \in \text{Aut}(G, \mathbb{B}, \mathbb{T})$ speziell (alles über F definiert). Dann gilt kanonisch*

$$i_\Theta : \mathcal{B}(G^{\Theta^\circ}, F) \xrightarrow{1-1} \mathcal{B}(G, F)^\Theta \subset \mathcal{B}(G, F).$$

Diese Einbettung ist funktoriell bei unverzweigten Galoiserweiterungen von F und man hat $G^{\Theta^\circ}(F)_x \subset G(F)_{i_\Theta(x)}$.

- (a) *Die Apartments gA^Θ (mit $g \in G^\Theta(F)$) in $\mathcal{B}(G^{\Theta^\circ}, F)$ sind Durchschnitte Θ -stabiler Apartments gA in $\mathcal{B}(G, F)$ mit $\mathcal{B}(G, F)^\Theta$.*
- (b) *Wenn ein Punkt $y \in \mathcal{B}(G, F)^\Theta$ hyperspeziell (in $\mathcal{B}(G, F)$) ist, so ist sein Urbild unter i_Θ hyperspeziell in $\mathcal{B}(G^{\Theta^\circ}, F)$.*
- (c) *Falls $P_I({}_{F'}\Phi) = \{P_I(\alpha) \mid \alpha \in {}_{F'}\Phi(G) \text{ vom Typ I oder III}\} \stackrel{\text{Def}}{=} P_I({}_{F'}\Phi)^{\text{lang}}$, ist i_Θ eine Abbildung von Kammerkomplexen, d.h. die Kammern im Bild von i_Θ sind Durchschnitte von Θ -stabilen Kammern mit $\mathcal{B}(G, F)^\Theta$.*
- (d) *Falls $P_I({}_{F'}\Phi) = P_I({}_{F'}\Phi)^{\text{kurz}}$, so sind die Bilder hyperspezieller Punkte in $\mathcal{B}(G^{\Theta^\circ}, F)$ unter i_Θ hyperspeziell in $\mathcal{B}(G, F)$.*

Beweis: Wegen der Invarianz des Gebäudes unter zentralen Isogenien (Lemma 4.7), sei G o.E. einfach zusammenhängend. Nach Steinberg 2.27 ist dann G^Θ zusammenhängend. Bewiesen wird, daß jede Θ -stabile Klasse von $\mathcal{B}(G, F) = G(F) \times A / \sim$ nichtleeren Schnitt hat mit

$$(G(F)^\Theta \times A^\Theta) / \sim_{G^\Theta} = \mathcal{B}(G^\Theta, F)$$

wobei die Relation \sim_{G^Θ} die Einschränkung der Relation (i') von $\mathcal{B}(G, F)$ auf $(G(F)^\Theta \times A^\Theta)$ ist. Sei (g, x) ein Vertreter einer Klasse aus \mathcal{B}^Θ , d.h. $(g, x) \sim (\Theta(g), \Theta(x)) = \Theta(g, x)$.

1. Reduktion: Es existiert ein solcher Vertreter mit $x \in A^\Theta$.

Weil G unverzweigt ist, ist nach Fakt 4.11 die Operation von $N(F)$ auf A genau die von $W_{aff} := \mathbb{Z}[_F\Phi^\vee] \rtimes W$. Sei $C \subset A$ eine Θ -stabile Kammer. Weil $N(F)$ auf den Kammern von A transitiv operiert, existieren Vertreter der Klasse mit $x \in \overline{C}$. Für $w \in W_{aff}$ folgt aus $w(x) \in \overline{C}$ stets $w(x) = x$. Daher und weil $\Theta(x) \in \Theta(\overline{C}) = \overline{C}$ hat man $x = \Theta(x)$ für diese Vertreter. Sei also o.E. ab jetzt $x \in A^\Theta$.

2. Reduktion:

$(g, x) \sim (\Theta(g), x)$ impliziert $g^{-1}\Theta(g) \in G(F)_x$. Nach der Iwasawazerlegung 4.19 gibt es $k \in G(F)_x$, $u \in \mathbb{U}(F)$ und $n \in N(F) = \text{Norm}(\mathbb{T}_{sp}, G)(F) = \text{Norm}(\mathbb{T}, G)(F)$,

$$g = u \cdot n \cdot k.$$

Weil $g^{-1}\Theta(g) \in G(F)_x$, gilt für die Doppelnebenklasse

$$\mathbb{U}(F) \cdot n \cdot G(F)_x = \mathbb{U}(F) \cdot g \cdot G(F)_x = \mathbb{U}(F) \cdot \Theta(g) \cdot G(F)_x = \mathbb{U}(F) \cdot \Theta(n) \cdot G(F)_x.$$

Wieder nach Fakt 4.19 folgt daraus $\nu(n) \in \nu(\Theta(n) \cdot N(F)_x) = \Theta(\nu(n \cdot N(F)_x))$. Daher ist $u^{-1}\Theta(u) = nkg^{-1}\Theta(g)\Theta(k)^{-1}\Theta(n)^{-1} \in G(F)_{\nu(n)x}$ und $(\nu(n))(x) \in A^\Theta$. Nach Lemma 4.20 existiert ein $v \in G(F)_{\nu(n)x}$ mit $u^{-1}\Theta(u) = v^{-1}\Theta(v)$. Also ist $gk^{-1}n^{-1}v^{-1} \in G(F)^\Theta$ und $(g, x) \sim (gk^{-1}n^{-1}v^{-1}, \nu(n)x)$, denn $g^{-1}(gk^{-1}n^{-1}v^{-1})n = k^{-1}(\text{int}n^{-1})(v^{-1}) \in G(F)_x$.

Die (schwache) Funktorialitätsaussage folgt aus $(\mathcal{B}(G, F')^\Gamma)^\Theta = (\mathcal{B}(G, F')^\Theta)^\Gamma$ mit (4.4.1').

Zu (a): Die Apartments sind assoziiert zu maximalen F -Splittori in G^Θ bzw. G . Weil beide Gruppen quasisplit sind, sind die Apartments bestimmt durch F -Paare $(\mathbb{B}^\Theta, \mathbb{T}^\Theta)$ bzw. (\mathbb{B}, \mathbb{T}) . Wegen Lemma 3.2 ergibt Schneiden mit G^Θ eine Bijektion zwischen den Paaren von G^Θ und den Θ -stabilen von G . (Vgl. (3.11)!)

Zu (c): Um zu sehen, daß die Kammern in $i_\Theta(\mathcal{B}(G^\Theta, F))$ Schnitte von Θ -stabilen Kammern mit $\mathcal{B}(G, F)^\Theta$ sind, muß man folgendes Analogon zu [Ti79, 1.10.1] beweisen: Im Θ -stabilen Apartment $A = A(G, \mathbb{T}_{sp}, F)$ gilt

$$\alpha + k \in {}_F\Phi_{aff} \implies \alpha|_{A^\Theta} + k \in {}_F\Phi(G^\Theta)_{aff}.$$

Weil G einfach zusammenhängend angenommen wird, kann man sich auf irreduzibles ${}_F\Phi$ zurückziehen. Man darf sogar annehmen, daß G zerfällt, denn G ist unverzweigt und für unverzweigte Erweiterungen F'/F hat man nach [Ti79, 1.10.1], daß die Wurzeln auf $A(G, \mathbb{T}_{sp}, F)$ die Einschränkung von ${}_F\Phi_{aff}$ auf $A(G, \mathbb{T}, F')^{\text{Gal}(F'/F)} = A(G, \mathbb{T}_{sp}, F)$ sind.

Fall 1: Für alle $\alpha \in \Phi = \Phi(G, \mathbb{T})$ vom Typ II gilt $P_I(\alpha) \notin (\Phi(G^\Theta) \subset \Phi_I)$.

Sei $\alpha + k \in {}_F\Phi_{aff}(G)$ gegeben. Nach Definition existiert ein $u \in U_\alpha(F)$ mit $l_\alpha(u) = k$. Weil die Wurzeln von $I\alpha$ (nach (2.5.5)) paarweise orthogonal zueinander sind, ist

$$u_{I\alpha} := \prod_{i=0}^{|I\alpha|-1} \Theta^i(u) \in U_\alpha(F) \cdot U_{\Theta\alpha}(F) \cdots U_{\Theta^{|I\alpha|-1}\alpha}(F) \cap G^\Theta =: U_{I\alpha}$$

unabhängig von der Reihenfolge der Produkte definiert. Ebenso ist die folgende Umordnung von Mengen möglich: ($m := |I\alpha| - 1$)

$$\begin{aligned} & (U_{-\alpha}(F) \cdots U_{-\Theta^m\alpha}(F)) \cdot u_{I\alpha} \cdot (U_{-\alpha}(F) \cdots U_{-\Theta^m\alpha}(F)) \\ &= (U_{-\alpha}(F)uU_{-\alpha}(F)) \cdots (U_{-\Theta^m\alpha}(F) \cdot \Theta^m(u) \cdot U_{-\Theta^m\alpha}(F)). \end{aligned}$$

Weil durch u nicht nur $(U_{-\alpha}(F)uU_{-\alpha}(F)) \cap N(F) = \{m(u)\}$ eindeutig bestimmt ist, sondern auch die Zerlegung von $m(u) = m^G(u)$ in $U_{-\alpha}(F)uU_{-\alpha}(F)$, hat man

$$\prod_{i=0}^{m-1} m(\Theta^i(u)) \in (U_{-I\alpha}u_{I\alpha}U_{-I\alpha}) \cap N(F) \subset G^\Theta,$$

denn auch dieses Produkt ist unabhängig von der Anordnung der Faktoren. Die Menge rechts ist (gelesen in der Gruppe G^Θ) nichts anderes als $U_{-\beta}(F)u_{I\alpha}U_{-\beta} \cap N(\mathbb{T}^\Theta, G^\Theta)(F)$ für die Wurzel $\beta = P_I(\alpha) \in \Phi(G^\Theta)$. Daher enthält sie genau ein Element. Also folgt für die Konstruktion von m in G^Θ :

$$m^{G^\Theta}(u_{I\alpha}) = \prod_{i=0}^{|I\alpha|-1} m^G(\Theta^i(u)) \in N(F) \cap G^\Theta.$$

Immer weiter wegen der Orthogonalität innerhalb $I\alpha$ erhält man

$$\nu\left(m^{G^\Theta}(u_{I\alpha})\right) = (t_\alpha \circ s_\alpha) \circ \dots \circ (t_{\Theta^m \alpha} \circ s_{\Theta^m \alpha}) = (t_\alpha \cdots t_{\Theta^m \alpha}) \circ s_{I\alpha}$$

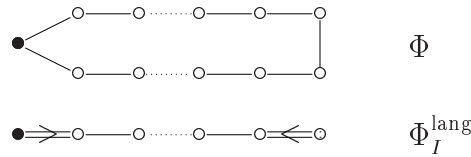
und schließlich $l_{P_I(\alpha)}^{G^\Theta}(u_{I\alpha}) = l_\alpha^G(u)$ (denn $P_I(\alpha)^\vee = S_{I\alpha^\vee}$ nach (2.5.8)). Somit hat man für $P_I(\alpha) \in \Phi(G^\Theta)$

$$\begin{aligned} \alpha + k \in {}_F\Phi_{aff}(G) &\implies \exists u \in U_\alpha(F) \text{ mit } k = l_\alpha^G(u). \\ &\implies u_{I\alpha} \in U_{P_I(\alpha)}(F) \subset G^\Theta(F) \text{ mit } k = l_{P_I(\alpha)}^{G^\Theta}(u_{I\alpha}). \\ &\implies P_I(\alpha) + k \in {}_F\Phi(G^\Theta). \end{aligned}$$

Für $v \in A^\Theta$ gilt aber $\alpha(v) = P_I(\alpha)(v)$. Also hat man die schärfste Formulierung über die Kammern gezeigt, wenn $\Phi(G^\Theta) = \Phi_I^{\text{lang}}$ ist.

Die Aussagen (b) und (d) kann man im Fall $\Phi_I^{\text{kurz}} = \Phi_I^{\text{lang}}$ an der Tabelle 2.36 ablesen, denn dort wurde unter jedem ADE-System zu Φ das System zu Φ_I abgebildet (und zwar so, daß die entsprechenden Θ -Orbiten aus Φ über jedem $\alpha|_A \in \Phi_I$ abgebildet sind). Die hyperspeziellen Ecken sind bis auf Diagrammautomorphismen die schwarzen Ecken. Außer im Fall A_{2n} verifiziert man, daß über jeder hyperspeziellen Ecke bzgl. Φ_I genau eine Θ -fixierte hyperspezielle Ecke zu Φ liegt. Umgekehrt ergibt ein (eielementiger) Θ -Orbit einer fixierten hyperspeziellen Ecke zu Φ eine hyperspezielle Ecke für Φ_I .

Im Falle daß $\Phi = A_{2n}$ und $\Phi(G^\Theta) = \Phi_I^{\text{lang}}$ (d.h. vom Typ C_n ist) hat man allerdings folgendes Bild



Für die rechte hyperspezielle Ecke x des C_n -Systems ist daher $i_\Theta(x)$ keine Ecke in $\mathcal{B}(G, F)$ (sondern nur die Kantenmitte der zwei Ecken des Alkovens zu den beiden Wurzeln vom Typ II aus $\Delta_{ext}(A_{2n})$). Die einzige Θ -fixierte (hyperspezielle) Ecke des A_{2n} -Alkovens (die zu $-\alpha^+$) ergibt aber wenigstens eine hyperspezielle Ecke in $\mathcal{B}(G^\Theta, F)$. Zu zeigen bleiben noch die Aussagen (b) und (d) im

Fall 2: Φ ist von Typ A_{2n} und $\Phi(G^\Theta) = \Phi_I^{\text{kurz}}$, d.h. $G = \text{Sl}(2n+1)$ und Θ stabilisiert ein Splitting (und $\text{char}(\kappa(F)) = p > 2$).

Hier muß die Argumentation aus Fall 1 modifiziert werden, denn für Wurzeln vom Typ II sind nicht alle Elemente aus dem Θ -Orbit senkrecht aufeinander. Daher muß für diese Wurzel $l_{P_I(\alpha)}$ bzw. m^{G^Θ} anders berechnet werden. Für Wurzeln vom Typ I kann man alles aus Fall 1 übernehmen (und Wurzeln vom Typ III werden hier gar nicht betrachtet).

In den Bezeichnungen von Beispiel 2.19 ist $\alpha_0 := P_I(\tilde{\alpha}) = \varepsilon_{2n+1} - \varepsilon_1 = -\alpha^+$ vom Typ III und $\tilde{\alpha} = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_1$ vom Typ II. In G^Θ ist $P_I(\tilde{\alpha})$ Wurzel aber nicht $P_I(\alpha_0) = \alpha_0$. (Vgl. Steinberg 2.27 oder Beispiel 2.19.) Der Alkoven (bei der Null) bezüglich der oberen Dreiecksmatrizen ist

$$C = \{x \in V \subset \mathbb{R}^{2n+1} \mid 1 + x_{2n+1} > x_1 > x_2 > \dots > x_{2n+1}\}$$

Behauptung. Sei $C_{G^\Theta} \subset A(G^\Theta, \mathbb{T}^\Theta, F')$ der Alkoven (für G^Θ) zu \mathbb{B}^Θ mit $0 \in \overline{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} i_\Theta(C_{G^\Theta}) &= (\overline{C} \cup s_{\alpha_0+1}\overline{C})^\circ \cap A^\Theta \\ &= \{x = (x_1, \dots, x_n, 0, -x_n, \dots, -x_1) \mid 1 - x_2 > x_1 > x_2 > \dots > x_n > 0\}, \end{aligned}$$

wobei s_{α_0+1} die Spiegelung am Alkovendeckel $H_{\alpha_0,1}$ ist.

Beweis: Zuerst berechnet man die Längenfunktion $l_{P_I(\alpha)}$ für die $\alpha \in {}_{F'}\Phi_{\text{aff}}$ vom Typ II. Die entscheidende Rechnung findet im wesentlichen in einer Sl_3 statt. Weil $\tilde{\alpha}$ und $\Theta\tilde{\alpha}$ nicht senkrecht aufeinander stehen, wird $u_{I\tilde{\alpha}}$ hier definiert durch (auch hier ist $\cdot = 0$)

$$U_{\tilde{\alpha}} \ni \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ x & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} = u \longmapsto u_{I\tilde{\alpha}} := \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ x & 1 & \cdot \\ x^{2/2} & x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & x/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ x & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & x/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\langle U_{\tilde{\alpha}}, U_{\Theta\tilde{\alpha}} \rangle \cap G^\theta = \{u_{I\tilde{\alpha}} \mid u \in U_{\tilde{\alpha}}\}$. Wie im Beweis des Steinberggliffs 2.7 bereits benutzt, ist

$$\begin{aligned} m^{G^\theta} \left(\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ x & 1 & \cdot \\ x^{2/2} & x & 1 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & x^{2/2} \\ \cdot & -1 & \cdot \\ 2/x^2 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = n_0 \cdot \underbrace{\left(c(\tilde{\alpha})(S_{\tilde{\alpha}^\vee}) \right)}_{=P_I(\tilde{\alpha})^\vee} \otimes \pi_F^{\text{val}_F(x)} \\ &= n_0 \cdot \left((\alpha_0)^\vee \otimes \pi_F \right)^{2\text{val}_F(x)}, \end{aligned}$$

wobei $n_0 \in \text{Stab}_{\{0\}}(N(F))$ und $\pi_F \in \mathcal{O}_F$ ein Primelement ist. Aus der Rechnung folgt, daß $l_{P_I(\tilde{\alpha})}^{G^\Theta}(u_{I\tilde{\alpha}}) = 2 \cdot l_{\alpha_0}^G(u)$ für alle $u \in U_{\tilde{\alpha}}$. Daher ist $P_I(\tilde{\alpha})|_{A^\Theta} + k = (\frac{1}{2}\alpha_0)|_{A^\Theta} + k \in {}_{F'}\Phi(G^\Theta)_{\text{aff}}$ äquivalent zu $k \in \mathbb{Z}$. Also ist $H_{\alpha_0,k} \cap A^\Theta$ genau dann eine Wand im Kammerkomplex $i_\theta(A(G^\Theta, \mathbb{T}^\Theta, F')) \subset A$, wenn $k \in 2\mathbb{Z}$.

Somit ergibt die Einschränkung des Alkovendeckels auf A^Θ keine Wand in $i_\Theta(A(G^\Theta))$.

Weil $s_{\alpha_0} \in W^\Theta$, hat das Bild $i_\Theta(C_{G^\Theta})$ nichtleeren Schnitt mit C und $s_{\alpha_0+1}(C)$. Man hat

$$\overline{C} \cup s_{\alpha_0+1}\overline{C} = \{x \in V \mid \alpha(x) > 0 \ \forall \alpha \in \Delta\} \cap \{x \in V \mid (s_{\alpha_0^\vee}(\alpha))(x) + 1 > 0 \ \forall \alpha \in \Delta\}.$$

Weil $\langle \alpha, \alpha_0^\vee \rangle \neq 0$ für $\alpha \in \Delta$ impliziert, daß $\alpha \in \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 =: \alpha_1, \varepsilon_{2n} - \varepsilon_{2n+1} =: \alpha_{2n}\}$ vom Typ I ist, und weil $s_{\alpha_0+1}(H_{\alpha_1,0}) = H_{s_{\alpha_0^\vee}(\alpha_1),1} = H_{\varepsilon_{2n+1}-\varepsilon_2,1}$, ist der "Deckel" von $(\overline{C} \cup s_{\alpha_0}\overline{C}) \cap A^\Theta$ gerade

$$H_{s_{\alpha_0^\vee}(\alpha_1),1} \cap A^\Theta = \{x \in A^\Theta \mid (s_{\alpha_0^\vee}(\alpha_1))(x) + 1 = 0\} = \{(x_1, \dots, -x_1) \mid -x_1 - x_2 + 1 = 0\}.$$

Dies ist nach den Überlegungen im Fall 1 eine Wand im Kammerkomplex $i_\Theta(A(G^\Theta))$. \square

Die Behauptung zeigt, daß in diesem Fall i_Θ keine Abbildung von Kammerkomplexen ist. Außerdem werden in diesem Fall die (beiden) hyperspeziellen Ecken des B_n -Alkovens C_{G^Θ} bijektiv auf die beiden hyperspeziellen Punkte von $(\overline{C} \cup s_{\alpha_0+1}\overline{C}) \cap A^\Theta$ (das sind 0 und $(1, 0, \dots, 0, -1)$) abgebildet. \square

Korollar 4.22. *Sei Θ ein spezieller F -Automorphismus von G . Äquivalent sind:*

- Für den eindeutig bestimmten Automorphismus Θ_{sc} von G_{sc} über Θ ist $G_{sc}^{\Theta_{sc}}$ einfach zusammenhängend.
- $i_\Theta : \mathcal{B}(G^{\Theta^\circ}, F) \rightarrow \mathcal{B}(G, F)$ aus Satz 4.21 ist eine Inklusion von Kammerkomplexen.
- $\Phi(G^{\Theta^\circ}) = \Phi(G)_I^{\text{lang}} = \{P_I(\alpha) \mid \alpha \in \Phi(G) \text{ ist vom Typ I oder III}\}$

Andererseits sind äquivalent:

- Θ stabilisiert ein (\bar{F}) -Splitting von G .
- für alle hyperspeziellen Punkte $x \in \mathcal{B}(G^{\Theta^\circ}, F)$ ist $i_\Theta(x)$ hyperspeziell in $\mathcal{B}(G, F)$.
- $\Phi(G^{\Theta^\circ}) = \Phi(G)_I^{\text{kurz}} = \{P_I(\alpha) \mid \alpha \in \Phi(G) \text{ ist vom Typ I oder II}\}$

Rationalitätsfragen für L

Sei L zusammenhängend und erzeuge \tilde{G} , so daß G quasisplit ist.

Definition 4.23. *Sei $Z = \text{Cent}(G)$ und $\Theta_Z \in \text{Aut}(Z)$ von L bewirkt. Weiter*

$$A_{G,\Theta_Z} := \text{Kern}[H^1(F, Z) \rightarrow H^1(F, G)]$$

$$B_{G,\Theta_Z} := \text{Bild}[A_{G,\Theta_Z} \xrightarrow{1-\Theta_Z} H^1(F, Z)]$$

$$C_{G,\Theta_Z} := H^1(F, Z) / B_{G,\Theta_Z}$$

(4.24) Definition von $z_{\mathbf{spl}_G}$ und $\gamma(L)$:

Sei \mathbf{spl}_G ein F -Splitting und Θ^* die gesternte Aktion von L bzgl. \mathbf{spl}_G . Wähle einen Vertreter $\theta^* \in L(\bar{F})$ für Θ^* . Die Kohomologieklassse von $z_{\mathbf{spl}_G}(\sigma) := \theta^* \cdot \sigma(\theta^*)^{-1} \in Z$ in $H^1(F, Z)$ hängt nicht ab von der Wahl von θ^* mit $\Theta^*|_G = \text{int}\theta^*|_G$.

Das Bild $\gamma(L)$ der Klasse $[z_{\mathbf{spl}_G}(\sigma)]$ in $C_{G, \Theta^*|_Z}$ ist unabhängig vom F -Splitting \mathbf{spl}_G , denn je zwei F -Splittings sind $G_{ad}(F)$ -konjugiert und

$$\begin{aligned} z_{g \cdot \mathbf{spl}_G \cdot g^{-1}}(\sigma) &= (g\theta^*g^{-1}) \cdot \sigma(g\theta^*g^{-1})^{-1} = g\theta^* \underbrace{g^{-1}\sigma(g)}_{\in Z} \theta^{*-1} \underbrace{\theta^*\sigma(\theta^*)^{-1}}_{\in Z} \sigma(g)^{-1} \\ &= z_{\mathbf{spl}_G}(\sigma) \cdot (1 - \Theta^*)(g\sigma(g)^{-1}) \end{aligned}$$

für ein $g \in G(\bar{F})$ mit $\text{int}g \in G_{ad}(F)$.

Satz 4.25. *Sei \tilde{G} quasisplit, erzeugt von einer Zusammenhangskomponente L , die auf Z den Automorphismus Θ_Z bewirkt. Dann sind äquivalent*

- $L(F) \neq \emptyset$.
- $\gamma(L) \in C_{G, \Theta_Z}$ liegt im Bild von

$$\text{Kern}[H^1(F, Z) \rightarrow H^1(F, \mathbb{T})] \longrightarrow C_{G, \Theta_Z}$$

für (irgend-)einen maximalen F -Torus \mathbb{T} , der in einer F -Borelgruppe liegt.

Beweis: Weil je zwei F -Paare (\mathbb{B}, \mathbb{T}) und $(\mathbb{B}', \mathbb{T}')$ $G(F)$ -konjugiert sind, hat man

$$\text{Kern}[H^1(F, Z) \rightarrow H^1(F, \mathbb{T})] = \text{Kern}[H^1(F, Z) \rightarrow H^1(F, \mathbb{T}')].$$

Daher ist die Wahl von \mathbb{T} im Satz unerheblich.

Für die eine Richtung sei $\vartheta \in L(F)$. Wähle ein F -Splitting $\mathbf{spl}_G = (\mathbb{B}, \mathbb{T}, \{X_\alpha\})$. Weil $(\text{int}\vartheta)(\mathbb{B}, \mathbb{T})$ ein F -Paar ist, gibt es ein $h \in G(F)$, so daß $\vartheta_1 := h \cdot \vartheta$ das Paar (\mathbb{B}, \mathbb{T}) stabilisiert.

Dann gibt es ein $t \in \mathbb{T}(\bar{F})$, so daß $\vartheta_2 := t \cdot \vartheta$ das Splitting \mathbf{spl}_G stabilisiert. Weil $\text{int}\vartheta_2$ die gesternte Aktion von L bzgl. \mathbf{spl}_G bewirkt, hat man

$$[z_{\mathbf{spl}_G}(\sigma)] \ni \vartheta_2 \cdot \sigma(\vartheta_2)^{-1} = th\vartheta \cdot \sigma(th\vartheta)^{-1} = t\sigma(t)^{-1},$$

d.h. $[z_{\mathbf{spl}_G}(\sigma)] \in \text{Kern}[H^1(F, Z) \rightarrow H^1(F, \mathbb{T})]$.

Für die umgekehrte Richtung wähle ebenfalls ein F -Splitting $\mathbf{spl}_G = (\mathbb{B}, \mathbb{T}, \{X_\alpha\})$ und einen Vertreter $\theta^* \in L(\bar{F})$ für die gesternte Aktion von L bzgl. \mathbf{spl}_G . Dann ist $\gamma(L)$ das Bild von $z_{\mathbf{spl}_G}(\sigma) := \theta^* \sigma(\theta^*)^{-1}$ in $C_{G, \Theta^*|_Z}$. Weil die Wahl von \mathbb{T} in der Formulierung des Satzes unerheblich ist, besagt die Voraussetzung nun, daß es $g \in G(\bar{F})$, $t \in \mathbb{T}(\bar{F})$ und $z \in Z(\bar{F})$ gibt, so daß $g^{-1}\sigma(g) \in Z$ und

$$t^{-1}\sigma(t) = z\sigma(z)^{-1} \cdot z_{\mathbf{spl}_G}(\sigma) \cdot (1 - \Theta^*)(\sigma(g)^{-1}g).$$

Daher ist $gzt\theta^*g^{-1} \in L(F)$, denn

$$\begin{aligned}
 1 &= \underbrace{zt\theta^*\sigma(\theta^{*-1}t^{-1}z^{-1})}_{\text{Term 1} \in Z} \cdot \underbrace{\sigma(g)^{-1}g}_{\text{Term 2} \in Z} \cdot \underbrace{\Theta^*(\sigma(g)^{-1}g)^{-1}}_{\text{Term 3} \in Z} \\
 &= \underbrace{(zt\theta^*)g^{-1}\sigma(g)(zt\theta^*)^{-1}}_{\text{Term 3}} \cdot \underbrace{(zt\theta^*)\sigma(zt\theta^*)^{-1}}_{\text{Term 1}} \cdot \underbrace{\sigma(g)^{-1}g}_{\text{Term 2}} \\
 &= (gzt\theta^*g^{-1}) \cdot \sigma(gzt\theta^*g^{-1})^{-1} \quad \square
 \end{aligned}$$

(4.26) Falls $L(F) \neq \emptyset$ und $\text{Cent}(G)^\circ$ anisotrop ist, gibt es auch stark kompakte Elemente in $L(F)$: Dazu betrachte eine Kammer C im Gebäude $\mathcal{B}(G, F)$ und ein $\theta \in L(F)$. Weil $G_{sc}(F)$ transitiv auf den Kammern des Gebäudes operiert, gibt es ein $g \in G(F)$, so daß $g\theta \in L(F)$ die Kammer stabilisiert. Da der Stabilisator von C in $\text{Aut}(\tilde{G})$ endlich ist, ist eine geeignete Potenz von $g\theta$ stark kompakt in $G(F)$. Also ist $g\theta$ selbst stark kompakt (nach (3.28)).

Behauptung 4.27. *Sei $\mathbf{spl} = (\mathbb{B}, \mathbb{T}, \{X_\alpha\})$ ein F -Splitting von G und F'/F ein endlicher unverzweigter Zerfällungskörper von \mathbb{T} . Wenn $z_{\mathbf{spl}}(\sigma) \in Z^1(F', (1 - \theta)Z)$ im Bild von*

$$(1 - \theta) : H^1(F', Z) \longrightarrow H^1(F', Z)$$

liegt, dann existiert eine unverzweigte Erweiterung $F''/F'/F$ und ein $\theta'' \in \tilde{\mathbb{T}}(F'') \cap L$, das ein F -Splitting \mathbf{spl}'' mit $(\mathbb{B}, \mathbb{T}) \subset \mathbf{spl}''$ stabilisiert.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert ein $\theta^* \in \tilde{\mathbb{T}}(\bar{F}) \cap L$, das \mathbf{spl} stabilisiert, so daß $z_{\mathbf{spl}}(\sigma) := \theta^*\sigma(\theta^*)^{-1} = (1 - \theta)z(\sigma)$ für einen Kozykel $z(\sigma) \in Z^1(F', \text{Cent}(G))$. Weil nach Hilbert–Noether $H^1(F', \mathbb{T}) = 1$, gibt es ein $t \in \mathbb{T}(\bar{F})$ mit $z(\sigma) = t^{-1}\sigma(t)$ für $\sigma \in \text{Gal}(\bar{F}/F')$. Also ist $(1 - \Theta^*)t \cdot \theta^* = t\theta^*t^{-1} \in \tilde{\mathbb{T}}(F')$ und stabilisiert das Splitting $\mathbf{spl}' = \text{intt}(\mathbf{spl}) = (\mathbb{B}, \mathbb{T}, \{\alpha(t) \cdot X_\alpha\})$. Dies ist ein F' -Splitting, weil $\text{intt} \in G_{ad}(F')$. Sei $\pi \in \mathcal{O}_F$ ein Primelement und F^{unv}/F die maximale unverzweigte Erweiterung in \bar{F}/F . Offensichtlich ist $\mathbf{spl}'' := (\mathbb{B}, \mathbb{T}, \{\pi^{\text{val}_F(\alpha(t))} X_\alpha\})$ ein F -Splitting. Man sucht nun ein $t_2 \in \mathbb{T}_{der}(F^{unv})$, so daß $\theta'' := t_2 t \theta^* (t_2 t)^{-1}$ das Splitting \mathbf{spl}'' stabilisiert. Nach dem Ansatz stabilisiert θ'' das Splitting $(\mathbb{B}, \mathbb{T}, \{\alpha(t_2 t) \cdot X_\alpha\})$. Also ist man fertig, wenn t_2 für jedes $\alpha \in \Delta$ die Gleichung

$$\alpha(t_2) = \pi^{\text{val}_F(\alpha(t))} \cdot \alpha(t)^{-1} \in \mathcal{O}_{F'}^\times$$

löst. Das geht nach dem nachfolgenden Lemma. □

Lemma 4.28. *Sei $T \subset G$ ein Torus, der über der endlichen unverzweigten Erweiterung F'/F zerfällt. Für alle $\alpha \in \Delta(G, T)$ seien Zahlen $x_\alpha \in \mathcal{O}_{F'}^\times$ gegeben.*

Dann existiert eine endliche unverzweigte Erweiterung F''/F' und ein $t \in T(F'')_c$ mit $\alpha(t) = x_\alpha$ für alle $\alpha \in \Delta$.

Beweis: Klar ist, daß die x_α ein (wohlbestimmtes) Element $t_{ad} \in T_{ad}(F)_c$ definieren. Zu zeigen ist die Existenz von F'' und $t \in T(F'')_c$, so daß t_{ad} das Bild von t ist unter

$T \rightarrow T_{ad}$. Nach der topologischen Jordanzerlegung 3.29 kann man sich auf die Fälle t_{ad} residuell halbeinfach bzw. topologisch unipotent reduzieren.

Es gibt eine nur von $\Phi = \Phi(G)$ abhängende Zahl m , so daß die Fundamentalgewichte zu Φ alle in $\frac{1}{m}\mathbb{Z}[\Phi^\vee]$ liegen. (Man kann für m z.B. das Produkt über alle Coxeterzahlen h_i für die irreduziblen Subwurzelsysteme nehmen oder $m = 2 \cdot |\mathbb{Z}[\Phi]^*/\mathbb{Z}[\Phi^\vee]|$.)

Nach Generalannahme (1.1) darf man $p \nmid m$ annehmen. Sei $\Delta = \{\alpha_i\}$ eine Basis von Φ und $\beta_i^\vee \in \mathbb{Z}[\Phi]^*$ mit $\langle \alpha_i, \beta_j^\vee \rangle = \delta_{i,j}$ die Dualbasis zu Δ .

Das Element $t_1 := \sum_{i=1}^{|\Delta|} m\beta_i^\vee \otimes x_{\alpha_i} \in X_*(T) \otimes \mathcal{O}_{F'} = T(F')_c$ hat die Eigenschaft $\alpha_i(t) = \prod_j x_{\alpha_j}^{\langle \alpha_i, m\beta_j^\vee \rangle} = x_{\alpha_i}^m$. Falls alle $x_\alpha \in (1 + \mathfrak{p}_{F'})$ liegen, ist t_1 topologisch unipotent. Nach Korollar 3.30 existiert eine (eindeutige) m -te Wurzel $t \in T(F')_c$: $t^m = t_1$, d.h. $\alpha(t) = x_\alpha$ für alle $\alpha \in \Delta$.

Es bleibt der Fall, daß alle x_α im Teichmüllerschen Restsystem μ_F liegen. Dann gibt es eine endliche unverzweigte Erweiterung F'' mit m -ten Wurzeln $y_\alpha \in \mu_{F''}$ der $x_\alpha = y_\alpha^m$. Also erfüllt $t := \sum_i m\beta_i^\vee \otimes y_{\alpha_i} \in X_*(T) \otimes \mathcal{O}_{F''} = T(F'')_c$ die Bedingung $\alpha(t) = x_\alpha$ für alle $\alpha \in \Delta$. \square

Stark kompakte Elemente in $\tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L$

(4.29) In diesem Abschnitt sei $\tilde{G} = \langle L \rangle$ unverzweigt, d.h. quasisplit mit einem unverzweigten Zerfällungskörper F' ($\Gamma := \text{Gal}(F'/F)$ sei endlich). Weiter sei $l := |\pi_0(\tilde{G})|$, $\mathbf{spl}_G = (\mathbb{B}, \mathbb{T}, \{X_\alpha\})$ ein F -Splitting und $\Theta^* \in \text{Aut}(G, \mathbf{spl}_G)$ sei die gesternte Aktion von L . Sei $\tilde{\mathbb{T}} := \text{Cent}(\mathbb{T}^{\Theta^*}, \tilde{G}) = \langle \mathbb{T}, \theta^* \rangle$ und \mathbb{T}_{sp} der maximale F -Splittorus in \mathbb{T} .

(4.30) $L(F) \neq \emptyset \implies \tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L \neq \emptyset$, denn sei (\mathbb{B}, \mathbb{T}) ein geeignetes Θ^* -stabiles, über F definiertes Paar von G und $\vartheta \in L(F)$. Dann gibt es $g \in G(F)$, so daß $\text{int}\vartheta(\mathbb{B}, \mathbb{T}) = \text{int}g(\mathbb{B}, \mathbb{T})$. Also gilt dann $g^{-1}\vartheta \in \tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L \neq \emptyset$.

Als nächstes wird die Frage untersucht, wann $\tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L$ kompakte Elemente enthält. Weil alle F -Paare $G(F)$ -konjugiert sind, hat ein Torus $\tilde{\mathbb{T}}$ (bzgl. L), dessen Einskomponente in einer F -Borelgruppe liegt, genau dann stark kompakte Elemente in $\tilde{\mathbb{T}} \cap L$, wenn diese Eigenschaft für alle solchen Tori gilt.

Definition 4.31. Sei $l := |\pi_0(\tilde{G})|$ und ν die Ordnungsabbildung (aus (4.1)). Sei

$$N_l : X_*(\mathbb{T}) \longrightarrow X_*(\mathbb{T})^{\Theta^*} \quad x \longmapsto \sum_{i=0}^{l-1} \Theta^{*i}(x)$$

und N_l^L das folgendes Kompositum:

$$\begin{array}{ccccc} N_l^L : \tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L & \longrightarrow & \mathbb{T}^{\Theta^* \circ}(F) & \xrightarrow{\nu} & X_*(\mathbb{T}_{sp})^{\Theta^*} \\ x & \longmapsto & x^l & \longmapsto & \nu(x^l). \end{array}$$

Behauptung 4.32. *Die Abbildung N_l^L ist wohldefiniert.*

Beweis: Zu zeigen ist, daß $x^l \in \mathbb{T}^{\Theta^* \circ}(F)$. Weil die Abbildung $\eta : x \mapsto x^l$ stetig ist, ist das Bild von $L(\bar{F})$ in einer Zusammenhangskomponente enthalten. Weil $(\tilde{\mathbb{T}} \cap L)(\bar{F})$ Elemente der Ordnung l enthält, ist $\eta(\mathbb{T} \cap L(\bar{F})) \subset \tilde{\mathbb{T}}^{\Theta^* \circ}(\bar{F})$. \square

Satz 4.33. *Sei $\tilde{\mathbb{T}}$ und l wie in (4.29). Äquivalent sind:*

- (a) $N_l^L(\tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L) \subset N_l(X_*(\mathbb{T}_{sp}))$.
- (b) *Es gibt stark kompakte Elemente in $\tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L$.*
- (c) *Es gibt ein stark kompaktes Element $\theta \in \tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L$, so daß $\mathcal{B}(G, F)^\theta$ hyperspezielle Punkte enthält.*
- (d) *Es gibt ein stark kompaktes Element $\theta \in L(F)$, so daß $\mathcal{B}(G, F)^\theta$ hyperspezielle Punkte enthält.*

Beweis:

(a) \Leftrightarrow (b): Nach Definition ist klar, daß $N_l^L(\tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L)$ genau eine volle Nebenklasse in $X_*(\mathbb{T}_{sp})^{\Theta^*} / N_l(X_*(\mathbb{T}_{sp})) = H^2(\langle \Theta^* \rangle, X_*(\mathbb{T}_{sp}))$ ergibt. Genau dann ist $x \in \tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L$ stark kompakt, wenn $x^l \in \mathbb{T}^{\Theta^* \circ}(F)$ stark kompakt ist, d.h. $N_l^L(x) = \nu(x^l) = 1$.

(d) \Rightarrow (b): Sei $\mathbb{B} \supset \mathbb{T}$ eine F -Borelgruppe und $A = A(G, \mathbb{T}_{sp}, F)$ das Apartment zu \mathbb{T} in $\mathcal{B} := \mathcal{B}(G, F)$. Indem man θ geeignet mit Elementen aus $G(F)$ konjugiert, kann man o.E.d.A. annehmen, daß ein hyperspezieller Punkt $x \in A$ von θ fixiert wird. Weil x hyperspeziell ist, ist zu \mathbb{B} genau eine Kammer $C \subset A$ mit $x \in \bar{C}$: Dies ist die eindeutig bestimmte Kammer in A , die als Wände alle $H_{\alpha, -\alpha(x)}$ hat, für die $\alpha \in \Delta(\mathbb{B}, \mathbb{T})$. (Die Bezeichnung der Hyperebenen von A ist aus (4.1) oder (1.4)). $G_{sc}(F)_x$ operiert transitiv auf den Kammern des Sterns um x (gebildet in einem Apartment, das C und $\theta(C)$ enthält). Daher gibt es ein $g \in G_{sc}(F)_x$, so daß $\theta_1 := g \cdot \theta$ die Kammer C stabilisiert. Weil $\theta_1(A)$ ein Apartment ist, das C enthält, gibt es ein $b \in \text{Stab}_C(G_{sc}(F))$, so daß $\theta_2 := b \cdot \theta_1$ sowohl A als auch C und x stabilisiert. Somit wird \mathbb{T} stabilisiert und ebenso die Basis $\Delta(\mathbb{B})$ nach der Definition von C . Also stabilisiert $\theta_2 \in L(F)$ das F -Paar (\mathbb{B}, \mathbb{T}) , d.h. $\theta_2 \in \tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L$.

Bei der topologischen Jordanzerlegung von θ liegt nach Korollar 3.32 der residuell halbeinfache Anteil in $L(F)$. Also darf man o.E. θ von endlicher Ordnung $p \nmid m$ annehmen. Dann ist $\theta_2^m = (bg\theta)^m \in G(F)_x$. Also ist θ_2 stark kompakt.

(b) \Rightarrow (c): Fixiere ein F -Splitting \mathbf{spl}_G , das \mathbb{T} enthält. Sei $\theta \in \tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L$ stark kompakt. Wähle ein $t \in \mathbb{T}_{der}(\bar{F})$ so, daß $\theta^* := t^{-1}\theta$ die gesternte Aktion $\Theta^* \in \text{Aut}(G, \mathbf{spl}_G)$ von L bewirkt und auf dem Apartment $A \subset \mathcal{B}$ zu \mathbb{T}_{sp} so operiert, daß (auch) ein hyperspezieller Punkt fixiert wird. Dann ist $\text{int}t \in G_{ad}(F)$ und $\theta^l = (t\theta^*)^l \in \mathbb{T}_{ad}(F)_c$. Nach dem nachfolgenden Lemma 4.34 ist t von der Form

$$\text{int}t = t_1 \cdot \Theta^*(t_1)^{-1} \cdot t_2 \quad \text{mit} \quad t_1 \in \mathbb{T}_{ad}(F), \quad t_2 \in \mathbb{T}_{ad}(F)_c.$$

Sei $x \in A$ ein hyperspezieller Θ^* -fixierter Punkt. Also fixiert $\text{int}\theta = \text{int}t \circ \Theta^* = \text{int}t_1 t_2 \theta^* t_1^{-1}$ den Punkt $t_1 x \in A$. Dies ist ebenfalls ein hyperspezieller Punkt von A , da die Operation von $G_{ad}(F) \subset \text{Aut}(G)(F)$ nach Tits (4.16) eine Operation $\Xi \subset \text{Aut}(\Delta_{aff})$ bewirkt. Die Diagrammautomorphismen bilden (hyper-) spezielle Ecken aber stets in (hyper-) spezielle Ecken ab. \square

Lemma 4.34.

(a) $\nu\left(\left((1 - \Theta^*)\mathbb{T}\right)(F)\right) = X_*(\mathbb{T}_{sp}) \cap (1 - \Theta^*)V = X_*(\mathbb{T})^\Gamma \cap (1 - \Theta^*)V.$

(b) *Das Urbild von $\mathbb{T}^{\Theta^*}(F)_c$ unter der Normabbildung*

$$N_{\theta^*} : \mathbb{T}(F) \rightarrow \mathbb{T}(F) \quad t \mapsto (t\theta^*)^l = t \cdot \Theta^*(t) \cdots \Theta^{*l-1}(t)$$

ist $\mathbb{T}(F)_c \cdot ((1 - \Theta^)\mathbb{T})(F)$.*

(c) *Falls $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{sc}$ oder $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{ad}$ (d.h. falls G einfach zusammenhängend oder vom adjungierten Typ ist), hat man $((1 - \Theta^*)\mathbb{T})(F) = (1 - \Theta^*)(\mathbb{T}(F))$.*

(d) *Das Bild von $\mathbb{T}(F)_c$ unter N_{θ^*} hat endlichen Index in $\mathbb{T}(F)_c^{\Theta^*}$.*

Beweis: Zu a: Die Inklusion " \subset " ist klar ($t \in ((1 - \Theta^*)\mathbb{T})(F) \Rightarrow (t\theta^*)^l = 1 \Rightarrow N_l(\nu(t)) = 0 \Rightarrow \nu(t) \in (1 - \Theta^*)V$).

" \supset ": Sei $\lambda \in X_*(\mathbb{T}_{sp}) \cap (1 - \Theta^*)V$ und $\pi \in \mathcal{O}_F$ ein Primelement. Da $H^1(\langle \theta^* \rangle, X_*(\mathbb{T}_{sp}))$ endlich ist, gibt es $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in X_*(\mathbb{T}_{sp})$, so daß $m \cdot \lambda = (1 - \Theta^*)\mu$. Dann wird $t := \lambda(\pi) = (1 - \Theta^*)\mu(\sqrt[m]{\pi}) \in ((1 - \Theta^*)\mathbb{T})(F)$ auf λ abgebildet unter ν .

Zu b: Sei $V := X_*(\mathbb{T}_{sp}) \otimes \mathbb{R}$. Die erste Aussage folgt daraus, daß

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}(F) & \xrightarrow{N_{\theta^*}} & \mathbb{T}(F) \\ \nu \downarrow & & \downarrow \nu \\ X_*(\mathbb{T}_{sp}) & \xrightarrow{N_l} & X_*(\mathbb{T}_{sp}) \end{array}$$

kommutiert. Man hat $\text{Kern} N_l = X_*(\mathbb{T}_{sp}) \cap (1 - \Theta^*)V$ und sein Urbild unter der Ordnungsabbildung ν ist $\mathbb{T}(F)_c \cdot ((1 - \Theta^*)\mathbb{T})(F)$.

Zu c: Falls $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{ad}$ oder $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{sc}$, ist \mathbb{T}^{Θ^*} zusammenhängend (vgl. 2.13). Weil der Torus \mathbb{T}^{Θ^*} nach den Voraussetzungen (4.29) dieses Paragraphen über F' zerfällt, hat man mit Hilbert 90

$$1 \longrightarrow \mathbb{T}^{\Theta^*}(F') \longrightarrow \mathbb{T}(F') \xrightarrow{1-\Theta^*} ((1 - \Theta^*)\mathbb{T})(F') \longrightarrow 1$$

und damit die lange exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathbb{T}^{\Theta^*}(F) \longrightarrow \mathbb{T}(F) \xrightarrow{1-\Theta^*} ((1 - \Theta^*)\mathbb{T})(F) \longrightarrow H^1(\Gamma, \mathbb{T}^{\Theta^*}(F')).$$

Nach Tate–Nakayama ist im Falle $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{ad}$

$$H^1(\Gamma, \mathbb{T}^{\Theta^*}(F')) \simeq H^1(\Gamma, X_*(\mathbb{T})^{\Theta^*}) = H^1(\Gamma, \mathbb{Z}[\Phi]^{\Theta^*})$$

$\mathbb{Z}[\Phi]^{\Theta^*}$ hat eine galoisstabile \mathbb{Z} –Basis: Sie besteht aus allen Θ^* –Orbitsummen $S_{\beta^\vee} = \sum_{\gamma \in I\beta^\vee} \gamma$ der Dualbasis Δ^* zu Δ^\vee . Daher hat man nach Shapiro

$$\simeq \bigoplus_{S_{\beta^\vee}, \beta^\vee \in \Delta^*} \text{Hom}(\text{Stab}_{\beta^\vee}(\Gamma), \mathbb{Z} \cdot S_{\beta^\vee}) = 1$$

Analog zeigt man den Fall $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{sc}$.

Zu d: Weil $p \nmid l$ kann man nach Korollar 3.30.4 aus jedem topologisch unipotenten Element von $\mathbb{T}(F)_c^{\Theta^* \circ}$ (eindeutig) l –te Wurzeln ziehen. Daher liegen topologisch unipotenten Elemente von $\mathbb{T}(F)_c^{\Theta^* \circ}$ in $\text{Bild}(N_{\Theta^*}(\mathbb{T}(F)_c))$. Sie bilden eine Untergruppe von $\mathbb{T}(F)_c^{\Theta^* \circ}$ von endlichem Index. \square

Korollar 4.35. *Sei $L(F) \neq \emptyset$ und existiere ein $\theta^* \in \tilde{\mathbb{T}}(F') \cap L$, das ein F –Splitting stabilisiert. Dann*

- (a) *sind alle (vier) Aussagen von Satz 4.33 erfüllt.*
- (b) *existiert eine endliche unverzweigte Erweiterung F''/F' und ein $\theta'' \in \tilde{\mathbb{T}}(F'')$ von endlicher Ordnung, das ein F –Splitting stabilisiert.*

Beweis: Zu (a): Der Kozykel $z(\sigma) = \theta^* \sigma (\theta^*)^{-1} \in Z(F')$ ist unverzweigt. Weil \mathbb{T} über F' zerfällt, hat man nach Hochschild–Serre $H^1(F'/F, \mathbb{T}(F')) \simeq H^1(F, \mathbb{T})$. Nach einer relativen Version von Satz 4.25 (für F'/F ; mit genau dem dort gegebenen Beweis) folgt aus der Voraussetzung $L(F) \neq \emptyset$, daß $z(\sigma) \in \text{Kern}[H^1(F'/F, Z(F')) \rightarrow H^1(F'/F, \mathbb{T}(F'))]$. Für ein berandendes $t \in \mathbb{T}(F')$ hat man $\theta := t\theta^* \in \tilde{\mathbb{T}}(F)$ und $\nu(t) \in X_*(\mathbb{T})^\Gamma = X_*(\mathbb{T}_{sp})$. Nun rechnet man

$$N_l^L(\theta) = \nu((t\theta^*)^l) = \sum_{i=0}^{l-1} \Theta^{*i}(\nu(t)) \in N_l(X_*(\mathbb{T}_{sp})).$$

Damit ist das Kriterium 4.33.a erfüllt.

Zu (b): Nach Teil (a) gibt es ein stark kompaktes $\theta = t^* \cdot \theta^* \in \tilde{\mathbb{T}}(F)$. Wieder mit Lemma 4.34 schreibt man das Bild $\bar{t}^* \in T_{ad}(F)$ von der Form $\bar{t}^* = t_1 \cdot \Theta^*(t_1)^{-1} \cdot t_2$ mit $t_1 \in \mathbb{T}_{ad}(F)$ und $t_2 \in \mathbb{T}_{ad}(F)_c$. Wegen Lemma 4.28 gibt es eine unverzweigte Erweiterung F''/F' und ein $t'' \in \mathbb{T}(F'')_c$, dessen Bild in \mathbb{T}_{ad} genau t_2^{-1} ist. Sei $\theta'' := t'' \cdot \theta$. Dann stabilisiert $\text{int}\theta'' = \text{int}t_1 \circ \Theta^* \circ \text{int}t_1^{-1}$ jedes Splitting **spl**, für das $t_1^{-1}\mathbf{spl}t_1$ von Θ^* stabilisiert wird.

Daß man θ'' von endlicher Ordnung haben kann, ist ein Standardschluß: (Für ein zu p teilerfremdes Vielfaches m vom l ist $\theta''^m \in \text{Cent}(G)^{\theta^* \circ}(F)$ topologisch unipotent. Nach Korollar 3.30.4 existiert ein topologisch unipotent $z \in \text{Cent}(G)^{\theta^* \circ}(F)$, so daß $z^{-m} = \theta''^m$. Ersetze θ'' durch $z \cdot \theta''$.) \square

Lemma 4.36. *Wenn G unverzweigt und halbeinfach ist, gilt $N_l^L(\tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L) \subset N_l(\mathbb{Z}[\Phi]^{*\Gamma}) \cap X_*(\mathbb{T}_{sp})$.*

Beweis: Sei $\theta^* \in \tilde{\mathbb{T}}(\bar{F}) \cap L$ von der Ordnung l , so daß $\Theta^* := \text{int}\theta^*$ ein F -Splitting stabilisiert. Dann hat jedes $\vartheta \in \mathbb{T}(F) \cap L$ eine Zerlegung $\vartheta = t \cdot \theta^*$ mit $t \in \mathbb{T}(\bar{F})$, so daß $\text{int}t$ über F definiert ist. Also ist $N_l^L(\vartheta) = \nu(\vartheta^l) = \nu(t \cdot \Theta^*(t) \cdots \Theta^*(t)^{l-1}) = \sum_{i=0}^{l-1} \Theta^{*i}(\nu(t)) \in N_l(\mathbb{Z}[\Phi]^*)$. \square

Korollar 4.37. *Falls G vom adjungierten Typ ist, gibt es (immer) stark kompakte Elemente in $\tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L$.*

(4.38) Die Struktur von maximal kompakten Untergruppen eines Torus bzgl. L wird in Ansätzen durch folgenden Satz angedeutet.

Satz 4.39. *Sei \tilde{T} ein maximaler F -Torus bzgl. L , der über der endlichen unverzweigten Erweiterung F'/F zerfällt. Vorausgesetzt wird, daß $\tilde{T}(F) \cap L$ stark kompakte Elemente enthält. Sei T_{sp} der maximale Splittorus in $T := \tilde{T}$ und Θ_T von $\tilde{T} \cap L$ auf T bewirkte Automorphismus.*

- (a) *Die maximal kompakten Untergruppen von $\tilde{T}(F)$ sind von der Gestalt $U = \langle T(F)_c, \vartheta \rangle$, wobei $\vartheta \in \tilde{T}(F) \cap L$ stark kompakt ist (aber sonst beliebig).*
- (b) $\left\{ U \mid U \subset \tilde{T}(F) \text{ maximale kompakte Untergruppe} \right\} / T(F)\text{-Konj. ist ein prinzipal homogener Raum unter } H^1(\langle \Theta_T \rangle, X_*(T_{sp}))$.
- (c) *Je zwei maximale kompakte Untergruppen von $\tilde{T}(F)$ sind konjugiert über $T_{ad}(F')$.*

Beweis: Die Aussage (a) ist klar. Nach Wahl eines stark kompakten $\vartheta \in \tilde{T}(F) \cap L$ sei

$$\tilde{\nu}_\vartheta : \tilde{T}(F) \longrightarrow X_*(T_{sp}) \quad x \longmapsto \nu(x \cdot \vartheta^{-1}).$$

Sei $l = |\pi_0(\tilde{T})|$. Ein Element $x = t\vartheta \in \tilde{T}(F) \cap L$ ist genau dann kompakt, wenn $x^l = (t\vartheta)^l = t \cdot \Theta_T(t) \cdots \Theta_T^{l-1}(t)$ stark kompakt in $T(F)$ ist, d.h. wenn $\tilde{\nu}_\vartheta(x) \in (1 - \Theta_T)V \cap X_*(T_{sp})$, wobei $V := X_*(T_{sp}) \otimes \mathbb{R}$. So erhält man eine Bijektion der maximal kompakten Untergruppen von $\tilde{T}(F)$ mit $((1 - \Theta_T)V \cap X_*(T_{sp})) / (1 - \Theta_T)X_*(T_{sp}) = H^1(\langle \Theta_T \rangle, X_*(T_{sp}))$.

Nach Shapiro hat man $0 = H^1(\langle \Theta_T \rangle, X_*(T_{ad})) = ((1 - \Theta_T)V \cap \mathbb{Z}[\Phi]^*) / (1 - \Theta_T)\mathbb{Z}[\Phi]^*$. Wegen $X_*(T_{sp}) \subset X_*(T_{ad}) = \mathbb{Z}[\Phi]^*$ hat man damit (c). \square

(4.40) Sei ab nun G halbeinfach. Aus 4.33 und 4.36 folgt, daß das Problem, ob in $\tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L$ kompakte Elemente liegen, gemessen wird in

$$(iv) \quad \left(N_l(\mathbb{Z}[\Phi(G)]^{*\Gamma}) \cap X_*(\mathbb{T}_{sp}) \right) / N_l(X_*(\mathbb{T}_{sp})) =: \mathcal{K}(G, \Theta^*, l).$$

Daß diese Gruppe in gewisser Weise effektiv mißt, zeigt die

Behauptung 4.41. *Sei eine halbeinfache unverzweigte (zusammenhängende reduktive) Gruppe G gegeben, sowie ein F -Splitting $\mathbf{spl}_G = (\mathbb{B}, \mathbb{T}, \cdot)$ von G , ein $\Theta^* \in \text{Aut}(G, \mathbf{spl}_G)$ und ein $l \in \mathbb{N}$ fixiert. Dann gibt es zu jedem Element $x \in \mathcal{K}(G, \Theta^*, l)$ eine über F definierte Gruppe $\tilde{G} = \langle L \rangle$ mit*

- $\pi_0(\tilde{G}) \simeq \mathbb{Z}/l$ wird erzeugt von der Zusammenhangskomponente $L \subset \tilde{G}$
- L und Θ^* haben dasselbe Bild in $\text{Out}(G)$.
- $\tilde{G}^\circ = G$
- $x \in N_l^L(\tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L)$ für einen maximalen Torus $\tilde{\mathbb{T}}$ bzgl. L , dessen Einskomponente in einer F -Borelgruppe liegt.

Beweis: Vorbemerkungen:

Fixiere eine Θ^* -stabile Kammer C im Apartment $A \subset \mathcal{B}(G, F)$ zu \mathbb{T} fixiert. Man hat (z.B. nach [Hij79, Appendix 1.2]) einen (Θ^* -äquivalenten) Isomorphismus

$$\Omega_{(C,A)}(G_{ad}(F)) := \text{Stab}_C(G_{ad}(F)) \cap \text{Stab}_A(G_{ad}(F)) \simeq \mathbb{Z}[\Phi]^* / \mathbb{Z}[\Phi^\vee] =: \pi_1(\Phi),$$

bei dem einem $\omega \in \text{Norm}(\mathbb{T}, G_{ad})(F)$ links auf folgende Weise eine Klasse y in $\pi_1(\Phi) = \pi_1(G_{ad})$ zugeordnet wird: Man kann ω schreiben als $\omega = n \cdot t$ mit $n \in \text{Norm}(\mathbb{T}_{sc}, G_{sc})(F)$ und $t \in \mathbb{T}_{sc}(\bar{F})$. Das Bild von ω ist die Klasse von $\nu(t_{ad}) \in \mathbb{Z}[\Phi]^*$ in $\pi_1(\Phi)$, wobei t_{ad} das Bild von t in T_{ad} ist.

In allen Wurzelsystemen (mit äußeren Automorphismen) teilt $\text{ord}(\omega \circ \Theta^*)$ die Ordnung von Θ^* für alle $\omega \in \Omega_{(C,A)}(G_{ad}(F))$ und alle $\Theta^* \in \text{Out}(\Phi)$. Das verifiziert man in allen irreduziblen Wurzelsystemen, auf die man den allgemeinen Fall schnell reduziert.

Eigentlicher Beweis: Nach Annahme existiert ein $y \in \pi_1(\Phi)$ mit $N_l(y) = x$. Sei $\omega \in \Omega_{(C,A)}(G_{ad}(F))$ das Bild von y . Dann ist $\omega \circ \Theta^*$ ein F -Automorphismus von endlicher Ordnung und zwar hat man (nach der Vorbemerkung) $\text{ord}(\omega \circ \Theta^*) \mid l$. Daher kann man $\tilde{G} := G \rtimes \langle \theta \rangle$ bilden, wobei $\text{ord}(\theta) = l$, $\text{int}\theta|_G = \omega \circ \Theta^*$ und die F -Struktur von G so auf \tilde{G} ausgedehnt wird, daß $\theta \in \tilde{G}(F)$. Mit der Zerlegung $\omega = n \cdot t$ aus der Vorbemerkung hat man $t\theta \in \tilde{\mathbb{T}}(F)$ (wobei hier $t \in \mathbb{T}(\bar{F})$ und nicht \mathbb{T}_{sc} aufgefaßt wird). Man rechnet

$$N_l^L(t\theta) = \nu((t\theta)^l) = \sum_{i=0}^{l-1} \Theta^{*i}(\nu(t)) = N_l(y) = x. \quad \square$$

(4.42) Beispiel: Die irreduziblen Fälle: Falls $\Phi(G)$ ein irreduzibles Wurzelsystem ist, hat man $\mathcal{K}(G, \Theta^*, l) \neq 1$ genau dann, wenn $(G, \Gamma, \Theta^*, \pi_0(\tilde{G}), \pi_1(G))$ in den folgenden Listen vorkommt:

Fall 1: G zerfällt über F , d.h. $\Gamma = 1$, und das Bild $\Theta^* \in \text{Out}(G)$ von L ist nicht trivial.

$\Phi(G)$	$\text{ord}\Theta^*$	$l = \pi_0(\tilde{G}) $	$\pi_1(G)$	$C_{G,\Theta^*,l}$
A_{2n-1}	2	l gerade	$ \pi_1(G) < 2n$ ist eine reine 2-Potenz	$\mathbb{Z}/2$
D_{2n-1}	2	l gerade	$\pi_1(G) \not\cong \mathbb{Z}/4$	$\mathbb{Z}/2$
D_{2n}	2	$l \equiv 2 \pmod{4}$	$\pi_1(G)$ ist Θ^* -stabil und $ \pi_1(G) = 2$	$\mathbb{Z}/2$
D_{2n}	2	$4 \mid l$	$\pi_1(G)$ ist Θ^* -stabil und $ \pi_1(G) \in \{1, 2\}$	$\mathbb{Z}/2$

Fall 2: Das Bild $\Theta^* \in \text{Out}(G)$ von L ist trivial und G ist weiterhin split: $\Gamma = 1$.

$\Phi(G)$	$l = \pi_0(\tilde{G}) $	$\pi_1(G)$	$C_{G,\Theta^*,l}$
A_n	$l \in k\mathbb{Z}$ für ein $k \mid n$	$\pi_1(G) \simeq \mathbb{Z}/\frac{n}{k}$	\mathbb{Z}/k
B_n	l gerade	$\pi_1(G) = 1$	$\mathbb{Z}/2$
C_n	l gerade	$\pi_1(G) = 1$	$\mathbb{Z}/2$
D_{2n}	l gerade	$\pi_1(G) = \mathbb{Z}/2$ $\pi_1(G) = 1$	$\mathbb{Z}/2$ $(\mathbb{Z}/2)^2$
D_{2n-1}	$l \equiv 2 \pmod{4}$ $4 \mid l$	$\pi_1(G) \not\cong \mathbb{Z}/4$	$\mathbb{Z}/2$ $\mathbb{Z}/4$
E_6	$3 \mid l$	$\pi_1(G) = 1$	$\mathbb{Z}/3$
E_7	l gerade	$\pi_1(G) = 1$	$\mathbb{Z}/2$

Fall 3: Sowohl Γ als auch Θ^* sind nicht trivial. Weil sie miteinander vertauschen (und G quasisplit ist), hat man hier $\langle \Theta^* \rangle = \Gamma$. (Insbesondere im Fall D_4 !)

$\Phi(G)$	$\text{ord}\Theta^* = \Gamma $	$l = \pi_0(\tilde{G}) $	$\pi_1(G)$	$C_{G,\Theta^*,l}$
A_{2n-1}	2	l gerade	$\pi_1(G) = 1$	$\mathbb{Z}/2$
D_n	2	l gerade	$\pi_1(G) = 1$	$\mathbb{Z}/2$

Fixpunkte von anisotropen unverzweigten Tori

(4.43) Sei $\tilde{G} = \langle L \rangle$ in diesem Abschnitt unverzweigt. Gegeben sei ein maximaler, über F definierter Torus $\tilde{T} \subset \tilde{G}$ bzgl. L , der über einer unverzweigten Erweiterung F' von F zerfällt.

Bezeichne $\mathcal{B}' := \mathcal{B}(G, F')$ das Gebäude zu $G(F')$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G, F)$ das Gebäude zu $G(F)$ und $\Gamma = \text{Gal}(F'/F)$.

Satz 4.44 (Weissauer [W]). *Sei G , \tilde{T} und F' wie in (4.43) und $\Theta^* \in \text{Aut}(G)$ die gesternte Aktion von L bzgl. eines F -Splittings. Ferner sei ein hyperspezieller Θ^* -stabiler Punkt $x \in \mathcal{B}(G, F)$ gegeben.*

Dann gibt es ein $g \in G_{sc}^{\Theta^}(F')_x$, so daß $\tilde{T}' := (\text{int}g)(\tilde{T})$ ein $(\Theta^*$ -stabiler) F -Torus ist, der schwach stabil $G(F')$ -konjugiert ist zu \tilde{T} .*

Beweis: Sei weiterhin $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G(F), F)$ und $R' := \mathcal{O}_{F'}$, $R := \mathcal{O}_F$. Wähle ein Θ^* -stabiles F -Paar (\mathbb{B}, \mathbb{T}) , so daß $x \in A \subset \mathcal{B}$ im Apartment zu \mathbb{T}_{sp} liegt. Sei $\tilde{\mathbb{T}} = \text{Cent}(\mathbb{T}^{\Theta^*}, \tilde{G})$.

Sei $y := i_{\Theta^*}^{-1}(x)$ das Urbild von x unter der Abbildung $i_{\Theta^*} : \mathcal{B}(G^{\Theta^* \circ}, F) \xrightarrow{1-1} \mathcal{B}(G, F)^{\Theta^*}$ aus Satz 4.21. Nach 4.21.b ist y hyperspeziell im Gebäude $\mathcal{B}(G^{\Theta^* \circ}, F)$ der unverzweigten Gruppe $G^{\Theta^* \circ}$.

Nach (3.23) werden die schwach stabilen Konjugationsklassen (in der $G(F')$ -Konjugationsklasse von $\tilde{\mathbb{T}}$) parametrisiert durch (eine Untergruppe von) $H^1(\Gamma, W(\mathbb{T})^{\Theta^*})$. Es wird daher ein F -Subtorus \tilde{T}' von G konstruiert werden, so daß die $G(F)$ -Klassen $[\tilde{T}']$ und $[\tilde{T}]$ dasselbe Bild w_σ in $H^1(\Gamma, W(\mathbb{T})^{\Theta^*})$ haben.

Die Konstruktion geschieht mit Descent-Theorie, wie sie etwa in [Wa79, 17.1–17.3] oder in [BLR80, 6.2 Example B] beschrieben wird.

Sei \mathcal{F} das glatte affine zusammenhängende \mathcal{O}_F -Gruppenschema mit generischer Faser $(G^{\Theta^* \circ})_{sc}$, das Tits zur speziellen Ecke $y \in \mathcal{B}^{\Theta^*}$ assoziiert (vgl. Satz 4.5) und sei \mathcal{T} das abgeschlossene R' -Untergruppenschema von $\mathcal{F} \times_R R'$ mit generischer Faser $\text{Cent}(\tilde{\mathbb{T}}) = \mathbb{T}^{\Theta^*}$ aus 4.5.b. Weil y hyperspeziell ist, hat man $W \subset (G^{\Theta^* \circ})_{sc}(F')_y = \mathcal{F}(R')$. Nach 4.13 ist $H^1(\Gamma, \mathcal{F}(R')) = 1$. Daher existiert ein $g \in \mathcal{F}(R')$, so daß

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Gamma, W^{\Theta^*}) & \longrightarrow & H^1(\Gamma, \mathcal{F}(R')^{\Theta^*}) \\ [\sigma \mapsto w_\sigma] & \longmapsto & [\sigma \mapsto g^{-1}\sigma(g)] \end{array}$$

Mit Galoistheorie hat man einen Isomorphismus (von R -Moduln) $R' \otimes_R R' \xrightarrow{\sim} \prod_{\Gamma} R'$ und damit $R'[\mathcal{T}] \otimes_R R' \simeq \prod_{\Gamma} R'[\mathcal{T}]$, $f \otimes r \mapsto (\sigma(r) \cdot f_\sigma)_{\sigma \in \Gamma}$. Das Descentdatum $R'[\mathcal{T}] \otimes_R R' \rightarrow R'[\mathcal{T}] \otimes_R R'$ übersetzt sich mit Hilfe dieses Isomorphismus zu einem Descentdatum

$$\vartheta : \prod_{\Gamma} R'[\mathcal{T}] \longrightarrow \prod_{\Gamma} R'[\mathcal{T}].$$

Eine solche (bijektive) Abbildung ist genau dann ein Descentdatum, wenn sie gegeben ist durch ein System von R -linearen Automorphismen $\vartheta_\sigma : R'[\mathcal{T}] \rightarrow R'[\mathcal{T}]$ mit $\vartheta_\sigma \circ \vartheta_\tau = \vartheta_{\sigma\tau}$ und $\vartheta_\sigma(r \cdot f) = \sigma(r) \cdot \vartheta_\sigma(f)$ für alle $\sigma, \tau \in \Gamma$, $r \in R'$, $f \in R'[\mathcal{T}]$.

Wegen der Kozykleigenschaft von w_σ , erhält man aus dem Descentdatum ϑ für das Schema \mathcal{T} ein zweites Descentdatum ϑ' durch $\vartheta'_\sigma := \vartheta_\sigma \circ (\text{int} w_\sigma)^*$. Damit steigt das abgeschlossene Untergruppenschema $\text{int} g(\mathcal{T}) =: \mathcal{T}'$ von \mathcal{F} nach R ab. Projiziere seine generische Faser nach $G^{\Theta^* \circ}$. Sie bildet dort einen maximalen Torus T'' (der über F definiert ist). Weil T'' stark reguläre Elemente enthält (nach Lemma 3.2), ist $\tilde{T}' := \text{Cent}(T'', \tilde{G})$ der angekündigte Torus. \square

(4.45) Definition des Punktes $x(U) \in \mathcal{B}$:

Sei \tilde{T} wie in (4.43) aber zudem anisotrop und $\tilde{T}(F) \cap L$ enthalte stark kompakte Elemente. Sei U eine maximal kompakte Untergruppe von $\tilde{T}(F)$. (Weil $\tilde{T}(F) \cap L$ stark kompakte Elemente enthält, gibt es auch $\vartheta \in U \cap L$. Vgl. die Strukturaussage 4.39.)

Weil T über F' zerfällt, gibt es in \mathcal{B}' ein Apartment A' zu T : Es ist nach Fakt 4.10

die Fixpunktmenge von $T(F')_c$ in \mathcal{B}' . Weil T sowohl Γ - als auch $\Theta_T := \text{int}\vartheta$ -stabil ist, ist A' dies auch. Die Aktionen von Γ und Θ_T vertauschen. Die Anisotropie von \tilde{T} impliziert, daß $x(U) := A'^{\langle \Theta_T, \Gamma \rangle} = \mathcal{B}^U$ ein Punkt ist.

5 Die Transferfaktoren

Endoskopie und Matching von halbeinfachen Elementen

In diesem Kapitel wird die Definition der Transferfaktoren nach Kottwitz und Shelstad [KS99] gegeben. Dabei werden die meisten Bezeichnungen von [KS99] übernommen.

(5.1) Voraussetzungen: Ab jetzt wird für die ganze Arbeit ein Tripel (G, θ, \mathbf{a}) vorgegeben. Dabei ist G die Einszusammenhangskomponente einer reduktiven, über einem p -adischen Körper F definierten Gruppe \tilde{G} , die von $\theta \in \tilde{G}(F)$ und G erzeugt wird. Ferner ist $\mathbf{a} \in H^1(W_F, \text{Cent}(\hat{G}))$ und L die Zusammenhangskomponente von θ in \tilde{G} .

Eigentlich reicht es für diese Arbeit aus nur (L, \mathbf{a}) vorzugeben. Man fordert dann, daß L über F definiert ist, Zusammenhangskomponente einer reduktiven Gruppe ist und $L(F) \neq \emptyset$.

(5.2) Wahl von θ^* : Im Folgenden ist mit Ausnahme von Definition 5.9 immer ein $\theta^* \in L(\bar{F})$ gewählt, das ein F -Splitting stabilisiert. Dann ist der F -Automorphismus $\Theta^* = \text{int}\theta^*$ die gesternte Aktion von L aus (1.8) (bezüglich dieses F -Splittings von G). Sei

$$z^*(\sigma) := \theta^* \sigma (\theta^*)^{-1} \in Z^1(F, \text{Cent}(G))$$

Sein Bild in $H^1(F, \text{Cent}(G)_\theta)$ ist das von $\gamma(L)$ aus (4.24). Es hängt nicht von der Wahl von θ^* ab, wie dort gezeigt wurde.

Wenn man ein $\theta \in L(F)$ gewählt hat, kann man verlangen, daß $\theta^* = g_\theta \theta$ mit $g_\theta \in G_{\text{der}}(\bar{F})$. Dann ist $z^*(\sigma) = g_\theta \sigma (g_\theta)^{-1} \in \text{Cent}(G_{\text{der}})$.

Dual zur Operation von θ^* bzw. L auf dem Wurzeldatum $\Psi(G) = \Psi(\hat{G})^\vee$ hat man die \hat{G}^{W_F} -Konjugationsklasse eines $\hat{\theta} \in \text{Aut}(\hat{G})$, das ein W_F -invariantes Splitting von \hat{G} stabilisiert. (Nach [K84, Corollary 1.7] sind zwei W_F -invariante Splittings von \hat{G} konjugiert über \hat{G}^{W_F} .)

(5.3) Definiton der endoskopischen Gruppe:

In [KS99, (2.1)] wird definiert, was ein endoskopisches Datum (H, \mathcal{H}, s, ξ) zu dem Tripel (G, θ, \mathbf{a}) ist. Im Einzelnen gilt dabei:

(5.3.1) H ist eine zusammenhängende reduktive Gruppe, quasisplit und über F definiert.

(5.3.2) \mathcal{H} ist eine Splittextension der Weilgruppe W_F durch \hat{H} , so daß die durch die Extension bestimmte Abbildung $\bar{\rho}_{\mathcal{H}} : W_F \rightarrow \text{Out}(\hat{H})$ übereinstimmt mit der, die von der L -Aktion ρ_H auf \hat{H} herkommt (vgl. (1.10)).

(5.3.3) $s \in \hat{G}$ und $\text{ints} \circ \hat{\theta} =: s\hat{\theta}$ ist fast halbeinfach. (Vgl. 3.3.)

(5.3.4) $\xi : \mathcal{H} \rightarrow {}^L G$ ist ein L -Homomorphismus mit den Eigenschaften:

- $\xi|_{\hat{H}} : \hat{H} \xrightarrow{\sim} \text{Cent}(s\hat{\theta}, G)^\circ \stackrel{\text{Def}}{=} G^{s\hat{\theta}^\circ}$
- Sei $m_\xi \in Z^1(W_F, \hat{G})$ definiert durch $\xi(w) = m_\xi(w) \rtimes w \in {}^L G$ für alle $w \in W_F$. Dann gilt

$$s \cdot \left(\hat{\theta}(m_\xi(w)) \rtimes w \right) \cdot s^{-1} = a'(w) \cdot m_\xi(w) \rtimes w,$$

wobei a' ein 1-Kozykel in der Klasse von $\mathbf{a} \in H^1(W_F, \text{Cent}(\hat{G}))$ ist.

Die Gruppe H wird in einer solchen Situation endoskopische Gruppe von G genannt. Ein Isomorphismus zweier endoskopischer Daten (H, \mathcal{H}, s, ξ) und $(H', \mathcal{H}', s', \xi')$ ist ein Element $g \in \hat{G}$ mit

$$g\xi(\mathcal{H})g^{-1} = \xi'(\mathcal{H}') \quad \text{und} \quad gs\hat{\theta}(g)^{-1} \in s' \cdot \text{Cent}(\hat{G}).$$

Satz 5.4. *Sei H eine endoskopische Gruppe zu (G, θ, \mathbf{a}) . Dann gibt es eine kanonische Abbildung $\mathcal{A}_{H/L}$ von den halbeinfachen $H(\bar{F})$ -Konjugationsklassen in $H(\bar{F})$ zu den $G(\bar{F})$ -Konjugationsklassen fast halbeinfacher Elemente in $L(\bar{F})$. Sie bildet stark reguläre Elemente in H auf stark reguläre Elemente in \hat{G} ab. Falls $z^*(\sigma) \in (1-\theta^*)\text{Cent}(G_{sc})$, respektiert sie die Operation der Galoisgruppe $\text{Gal}(\bar{F}/F)$.*

Beweis: [KS99, 3.3.A bis C.] □

(5.5) Konstruktion von $\mathcal{A}_{H/L}$ und "vereinfachende" Konventionen:

Bei der bezeichnungsintensiven Konstruktion von $\mathcal{A}_{H/L}$ treffen [KS99] geschickte Wahlen. (Vgl. [KS99, (1.2), Beweis von 3.3.A, 3.3.B, (4.1)].) Ausgehend von (G, θ, \mathbf{a}) , wie in (5.1) gegeben, einer endoskopischen Gruppe H und einem maximalen, über F definierten Torus T_H von H , kann man ein ebenfalls gegebenes endoskopisches Datum (H, \mathcal{H}, s, ξ) isomorph so abändern, daß Folgendes gilt:

- $\mathbf{spl}_{\hat{G}} = (\mathcal{B}, \mathcal{T}, \{\mathcal{X}\})$ bzw. $\mathbf{spl}_{\hat{H}} = (\mathcal{B}_H, \mathcal{T}_H \{\mathcal{X}_H\})$ sind Splittings von \hat{G} bzw. \hat{H} , stabil unter der jeweiligen Aktion von W_F und $\mathbf{spl}_{\hat{G}}$ zudem noch $\hat{\theta}$ -invariant.
- $s \in \mathcal{T}$, $\xi(\mathcal{T}_H) = \mathcal{T}^{\hat{\theta}^\circ}$, $\xi(\mathcal{B}_H) \subset \mathcal{B}$ und ξ sei auf \hat{H} die Identität.
- In [KS99, Lemma 3.3.B] wird gezeigt, daß man zu jeder Wahl einer \bar{F} -Borelgruppe $B_H \supset T_H$ einen θ^* -stabilen maximalen F -Torus T und eine (\bar{F}) -Borelgruppe $B \supset T$ von G finden kann, so daß nach Identifikationen $\hat{T}_H \simeq \mathcal{T}_H$ und $\hat{T} \simeq \mathcal{T}$ in der Abbildungsfolge

$$\hat{T}_H \simeq \mathcal{T}_H \xrightarrow{\xi} (\mathcal{T}^{\hat{\theta}})^\circ \simeq (T_{\theta^*})^\wedge$$

zum einen die Galoisoperationen von rechts- und linksaußen aufeinandergehen und zum anderen die positiven (Ko-) Wurzeln auf positive (Ko-) Wurzeln

abgebildet werden. (Deswegen ist jetzt jedem Torus genau eine Borelgruppe zugewiesen worden.)

Ein zu einer solchen Abbildungskette dualer Isomorphismus $T_H \xrightarrow{\sim} T_{\theta^*}$ wird **zulässige Einbettung** genannt. D.h. dies ist ein Isomorphismus von T_H auf ein geeignetes $T_{\theta^*} = T/(1 - \theta^*)T$, der über F definiert ist und für geeignete Positivbereiche positive (Ko-) Wurzeln auf positive (Ko-) Wurzeln abbildet.

Die Existenz einer zulässigen Einbettung beweisen [KS99], indem sie mit Hilfe des Satzes von Steinberg über rationale Punkte in $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ -stabilen Konjugationsklassen in G_{sc} das Paar (B, T) geschickt konjugieren. Danach kann man $\mathcal{A}_{H/L}$ mit Hilfe von (3.8) beschreiben: Jede Konjugationsklasse in $H(\bar{F})$ schneidet T_H in einem $W(T_H, H)$ -Orbit. Ebenso schneidet jede $G(\bar{F})$ -Konjugationsklasse in $L^* T_{\theta^*}$ in einem $W(T, G)^{\theta^*}$ -Orbit. Nach den Vereinbarungen oben hat man aber eine Surjektion $T_H/W(T_H, H) \rightarrow T_{\theta^*}/W(T, G)^{\theta^*}$.

(5.6) In [KS99, 5.1] wird gezeigt, daß $\text{Cent}(G)_{\theta^*}$ natürlich und über F in $\text{Cent}(H)$ eingebettet ist, so daß bei jeder zulässigen Einbettung

$$\begin{array}{ccc} T_{\theta^*} & \longrightarrow & T_H \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Cent}(G)_{\theta} & \longrightarrow & \text{Cent}(H) \end{array}$$

kommutiert. (Alle Abbildungen sind über F .) Dadurch werde ab jetzt $\text{Cent}(G)_{\theta}$ mit seinem Bild in $\text{Cent}(H)$ identifiziert. Insbesondere definiert $z^*(\sigma) \in Z^1(F, \text{Cent}(G))$ einen 1-Kozykel $z_H^*(\sigma) \in Z^1(F, \text{Cent}(H))$ und $\gamma(L)$ aus (4.24) eine Klasse $\gamma_H(L) \in H^1(F, \text{Cent}(H))$.

Definition 5.7. Die zulässige Einbettung $T_H \rightarrow T_{\theta^*}$ aus (5.5) wird benutzt, um $\Phi(T_H, H)$ mit einem Subsystem von $\Phi(T, G)_I = P_I(\Phi(T, G))$ zu identifizieren. (Die Galoisaktion wird dabei respektiert.) Man sagt, eine Wurzel $\Phi(G)_I$ komme von H her, falls sie bei dieser Identifikation in $\Phi(H)$ liegt.

(5.8) Nach den Festlegungen in (5.5) bilden sowohl $\xi(w) = m_{\xi}(w) \rtimes w$ als auch die W_F -Operation von ${}^L G$ das Bild $\xi(\hat{T}_H) = \mathcal{T}^{\hat{\theta}^{\circ}}$ auf sich ab. Daher ist $m_{\xi}(w) \in \text{Norm}(\mathcal{T}^{\hat{\theta}^{\circ}}, \hat{G}) = \mathcal{T} \cdot \text{Norm}(\mathcal{T}^{\hat{\theta}^{\circ}}, \hat{G}^{\hat{\theta}^{\circ}})$ nach Behauptung 3.5. Man hat also eine Zerlegung $\xi(w) = t_{\xi}(w) \cdot n_{\xi}(w) \rtimes w$ mit $t_{\xi}(w) \in \mathcal{T}$ und $n_{\xi}(w) \in G_{der}^{\hat{\theta}^{\circ}}$. Die Eigenschaft (5.3.4) bedeutet für den 1-Kozykel m_{ξ} gerade

$$s^{\text{int}(m_{\xi}(w) \rtimes w)} = a'(w)^{-1} \cdot s \cdot \hat{\theta}(t_{\xi}) \cdot t_{\xi}^{-1} \text{ für alle } w \in W_F$$

Definition 5.9 (Norm-Image). Ein stark reguläres $\gamma \in H(\bar{F})$ heißt Norm-Image von $\delta \in L(F)$, wenn folgende äquivalente Aussagen erfüllt sind

- δ liegt in der $G(\bar{F})$ -Konjugationsklasse $\mathcal{A}_{H/L}(\gamma) \subset L$.

- Es gibt ein Matching $\gamma \leftrightarrow \delta$.

Mit einem Matching $\gamma \leftrightarrow \delta$ ist also folgende Situation gemeint: Es gibt

- (1) einen Vertreter $\theta^* \in L(\bar{F})$ für die gesternte Aktion von θ (bzw. L) bezüglich eines F -Splittings.
- (2) einen zulässigen (d.h. über F definierten) Isomorphismus $\eta : T_H \xrightarrow{\sim} T_{\theta^*}$, wobei $T_H := \text{Cent}(\gamma, H)$ und T ein geeigneter θ^* -stabiler F -Torus ist und $T_{\theta^*} = T/(1 - \theta^*)T$ dessen Koinvarianten.
- (3) $t^* \in T(\bar{F})$
- (4) $g \in G_{sc}(\bar{F})$

mit den Eigenschaften

- (5) $\gamma \mapsto P_{\theta^*}(t^*)$ unter $\eta : T_H(\bar{F}) \xrightarrow{\sim} T_{\theta^*}(\bar{F})$
- (6) $g\delta g^{-1} = t^* \cdot \theta^* =: \delta^* \in \tilde{T}$.
- (7) $\text{intg} : \text{Cent}(\delta, G) \xrightarrow{\sim} T^{\theta^*}$ ist über F definiert, d.h. $g \cdot \sigma(g)^{-1} \in T(\bar{F})$ für alle $\sigma \in \text{Gal}(\bar{F}/F)$. Eine dritte äquivalente Formulierung ist: $\text{intg} : T_G \xrightarrow{\sim} T$ ist über F definiert, wobei $T_G := \text{Cent}(G^\delta, G)$.

(5.10) Falls $\gamma \in H(\bar{F})$ Norm-Image eines Element aus $L(F)$ ist, liegt der Kozykel $\gamma^{-1}\sigma(\gamma)$ in der Klasse $\gamma_H(L) \in H^1(F, \text{Cent}(H))$, die in (5.6) definiert wurde als das Bild von $\gamma(L)$ aus (4.24) (oder gleichbedeutend das von $z^*(\sigma)$) unter $\text{Cent}(G) \twoheadrightarrow \text{Cent}(G)_\theta \hookrightarrow \text{Cent}(H)$.

Definition 5.11. Ein stark reguläres $\gamma \in H(\bar{F})$ wird $z_H^*(\sigma)$ -Norm-Image von $\delta \in G(F)$ genannt, wenn es ein Matching $\gamma \leftrightarrow \delta$ gibt wie in 5.9 und $(\partial\gamma)(\sigma) := \gamma^{-1}\sigma(\gamma) = z_H^*(\sigma)$.

Eigenschaften von Matchings

(5.12) Wenn \tilde{T}_G über der Erweiterung E/F zerfällt, kann man das Matching so führen, daß $g \in G_{sc}(E)$.

Beweis: Es gibt auf jeden Fall ein $h \in G_{sc}(E)$, so daß $\tilde{T} = h\tilde{T}_G h^{-1}$ der vermittelnde Torus (aus (5.9.2)) des Matchings ist. Sei $h\delta h^{-1} =: \delta_0 =: t_0\theta^*$. Nach (3.8) existiert ein $w \in W(T)^{\theta^*}$ mit $t_0 \equiv w(t^*) \pmod{(1 - \theta^*)T}$. Weil T über E zerfällt, ist $\text{Norm}(\tilde{T}, G)(E) \twoheadrightarrow W^{\theta^*}$ surjektiv. Man ändere also $h \in G_{sc}(E)$ so ab, daß $P_{\theta^*}(t_0) = P_{\theta^*}(t^*)$. Dann existiert $t \in \mathbb{T}(\bar{F})$ mit $\delta^* = tt_0\theta^*t^{-1} = thg^{-1}\delta^*gh^{-1}t^{-1}$. Weil δ^* stark regulär ist, hat man $hg^{-1} \in T(\bar{F})$, d.h. $h\sigma(h)^{-1} \in T(\bar{F})$. Somit kann man das Matching über η, \tilde{T}, h, t_0 führen (statt über η, \tilde{T}, g, t^*). \square

(5.13) Seien $\theta^*, \theta' \in L(\bar{F})$ beide F -Splitting stabilisierend. Dann gibt es $h \in G_{sc}(\bar{F})$ und $z \in \text{Cent}(G)$, so daß $\text{inh} \in G_{ad}(F)$ und $\theta' = zh\theta^*h^{-1}$. (Denn je zwei F -Splittings sind $G_{ad}(F)$ -konjugiert und ein Splitting legt den ihn stabilisierenden

Vertreter in L bis auf einen zentralen Faktor fest.)

Falls es ein Matching $\gamma \leftrightarrow \delta$ unter Benutzung von θ^* (in 5.9.1) gibt, existiert auch ein Matching $(\eta^{-1} \circ P_{\theta^*})(z)^{-1}\gamma \leftrightarrow \delta$, in dem θ' der Automorphismus ist. (Dabei ist $\eta^{-1} \circ P_{\theta^*} : \text{Cent}(G) \rightarrow \text{Cent}(H)$ die natürliche Abbildung aus (5.6).)

Denn man kann die Daten aus 5.9 ersetzen durch

- (1) $\theta' = zh\theta^*h^{-1}$
- (2) $T' := hTh^{-1}$ ist ein θ' -stabiler F -Torus und $\text{inh} \circ \eta : T_H \xrightarrow{\eta} T_{\theta^*} \xrightarrow{\text{inh}} T'_{\theta'}$ ist zulässig (und wohldefiniert), denn inh induziert den rechten F -Isomorphismus wegen

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{\theta'} & T' \\ \text{inh} \uparrow & & \uparrow \text{inh} \\ T & \xrightarrow{\theta^*} & T \end{array}$$

- (3) $t' := ht^*h^{-1}z^{-1} \in T'(\bar{F})$
- (4) $g' = hg \in G_{sc}(\bar{F})$

Behauptung 5.14. *Wenn T und T' beide θ^* -stabile F -Tori sind und $\eta' : T_H \rightarrow T'_{\theta^*}$ sowie η aus 5.9.2 beide zulässige Isomorphismen sind, dann sind $T^{\theta^* \circ}$ und $T'^{\theta' \circ}$ stabil konjugiert in $G^{\theta^* \circ}$.*

Wenn man das Matching $\gamma \leftrightarrow \delta$ über η' führen kann, gibt es sogar ein $h \in G_{sc}^{\theta^}(\bar{F})$, so daß $\eta' = \text{inh} \circ \eta$.*

Beweis: Man erhält einen F -Isomorphismus, wenn man die beiden zulässigen Abbildungen und Normabbildungen $N_{\theta^*} : t \mapsto t \cdot \theta^*(t) \cdots \theta^{*l-1}(t)$ auf beide Fixtori kombiniert zu

$$T'^{\theta' \circ} \xleftarrow{N_{\theta^*}} T'_{\theta^*} \xleftarrow{\eta'} T_H \xrightarrow{\eta} T_{\theta^*} \xrightarrow{N_{\theta^*}} T^{\theta^* \circ}.$$

Daher sind die beiden äußeren Tori stabil konjugiert in $G^{\theta^* \circ}$ nach der Charakterisierung in (3.23) (für den ungetwisteten Fall).

Seien θ^* , T' , η' , g' , $\delta^{*'}$, $t^{*'}$ die Daten für die zweite Realisierung des Matchings $\gamma \leftrightarrow \delta$. Weil $\delta^{*'} = g'g^{-1}\delta^*gg'^{-1}$ und δ^* konjugiert sind (in $G(\bar{F})$), liegen nach (3.8) $P_{\theta^*}(t^*) = \eta(\gamma)$ und $P_{\theta^*}(h^{-1}t^{*'}h) = (\text{inh}^{-1} \circ \eta')(\gamma)$ in einem W^{θ^*} -Orbit von T_{θ^*} , wobei $h \in G_{sc}^{\theta^* \circ}(\bar{F})$ einen F -Isomorphismus $\text{inh} : T \rightarrow T'$ bewirkt. Weil γ bzw. δ stark regulär sind, folgt $\text{inh}^{-1} \circ \eta' \circ \eta^{-1} \in W^{\langle \theta^*, \text{Gal}(\bar{F}/F) \rangle}$. Indem man h um einen (θ^* -invarianten) Vertreter dieses Elements der Weylgruppe abändert, hat man $\eta' = \text{inh} \circ \eta$. \square

Behauptung 5.15. *Sei $\delta \in L(F)$ stark regulär, $\tilde{T}_G := \text{Cent}(G^\delta, \tilde{G})$ der maximale Torus zu δ und E/F eine endliche Galoiserweiterung, die \tilde{T}_G zerfällt. Die $G(F)$ -Konjugationsklassen der Elemente $\delta \in L(F)$, die ein vorgegebenes $\gamma \in H(\bar{F})$ zum Norm-Image haben, werden parametrisiert durch*

$$\text{Kern} \left[H^1 \left(\Gamma, T_G(E) \xrightarrow{1 - \Theta_{T_G}} ((1 - \Theta_{T_G})T_G)(E) \right) \longrightarrow H^1 \left(\Gamma, G(E) \right) \right].$$

Dabei ist (wieder) $\Gamma := \text{Gal}(E/F)$, $T_G := \tilde{T}_G^\circ$ und $\Theta_{T_G} := \text{int}\delta$ auf T_G .

Beweis: Für das Matching $\gamma \leftrightarrow \delta$ werden wieder θ^* , T , η , g , δ^* , t^* in ihren Eigenschaften aus Definition 5.9 benutzt.

Sei zuerst ein zweites Matching $\gamma \leftrightarrow \delta'$ gegeben. Dieses Matching werde geführt über θ^* , T , g' , δ'^* , t'^* . Daß man dieselben θ^* und T für beide Matchings benutzen darf, wurde in (5.13) und (5.14) bemerkt. Nach (5.12) darf man $g, g' \in G_{sc}(E)$ annehmen!

Daß γ zugleich Norm-Image von δ und δ' ist, bedeutet, daß δ^* und δ'^* konjugiert sind in \tilde{T} . Also existiert ein $t \in T_G(\bar{F})$, so daß $\delta'^* = gtg^{-1}\delta^*gt^{-1}g^{-1} = gt\delta t^{-1}g^{-1}$. Mit $h := g'^{-1}g \in G(E)$ hat man also $\delta' = ht\delta t^{-1}h^{-1}$. Klarerweise ist $h^{-1}\sigma(h) \in T_G$ und $(1 - \Theta_{T_G})t = t\delta t^{-1}\delta^{-1} = h^{-1}\delta' h\delta^{-1} \in T_G(E)$. Daraus folgt $(ht)^{-1}\sigma(ht) \in G^\delta = T_G^{\Theta_{T_G}}$ für alle $\sigma \in \Gamma$. Daher hat man

$$1 = (1 - \Theta_{T_G})\left(t^{-1}h^{-1}\sigma(h)\sigma(t)\right) = (1 - \Theta_{T_G})\left(h^{-1}\sigma(h)\right) \cdot (1 - \sigma)\left((1 - \Theta_{T_G})(t^{-1})\right)$$

Also ist

$$(i) \quad \left(h^{-1}\sigma(h), (1 - \Theta_{T_G})(t^{-1})\right) \in Z^1\left(\Gamma, T_G(E) \xrightarrow{1 - \Theta_{T_G}} ((1 - \Theta_{T_G})T_G)(E)\right).$$

Für die andere Richtung sei neben dem Matching $\gamma \leftrightarrow \delta$ ein $h \in G(E)$ und $t \in T_G(\bar{F})$ gegeben, so daß (i) gilt. Dann rechnet man nach, daß $\delta' := ht\delta(ht)^{-1} \in G(F)$ und $\gamma \leftrightarrow \delta'$ ein Matching ist. (Es wird geführt über θ^* , T , gh^{-1} , $\text{int}(gtg^{-1})\delta^*$, $t^* \cdot (1 - \theta^*)(gtg^{-1})$, in den Bezeichnungen für $\gamma \leftrightarrow \delta$ oben.) \square

Indem man zu zwei stark regulären Elementen $\delta, \delta' \in L(F)$, die ein gemeinsames Element γ zum Norm-Image haben, die Bizentralisatoren $\text{Cent}(G^\delta), \tilde{G} = \tilde{T}$ bzw. $\text{Cent}(G^{\delta'}), \tilde{G} = \tilde{T}'$ bildet, erhält man aus Behauptung 5.15 das

Korollar 5.16. *Wenn zwei maximale Tori \tilde{T} und \tilde{T}' (bzw. zwei maximale kompakte Untergruppen U_1, U_2 von F -rationalen Punkten zweier maximaler Tori), die über F' zerfallen, jeweils stark reguläre Elemente enthalten, die beide dasselbe $\gamma \in H(\bar{F})$ als Norm-Image haben, dann sind \tilde{T} und \tilde{T}' (bz. U_1 und U_2) halbstabil $G(F')$ -konjugiert.*

Fundamentale Annahmen

(5.17) In dieser Arbeit wird \tilde{G} und die endoskopische Gruppe H (aus (5.1) bzw. (5.3)) nicht von der allgemeinsten Gestalt in [KS99] benötigt. Es werden folgende vereinfachende Annahmen gemacht:

(1) Der Körper F ist p -adisch.

- (2) $G = \tilde{G}^\circ$ ist unverzweigt, d.h. quasisplit und zerfällt über einer endlichen unverzweigten Erweiterung F' von F . Als innere Form G^* mit F -Borelgruppe zu G wird $G = G^*$ benutzt und der innere Twist $\psi : G \rightarrow G^*$ in [KS99] sei die Identität.
- (3) $\theta \in L(F)$ ist stark kompakt und es gibt ein $\theta^* \in L(F')$ von endlicher Ordnung, so daß $\text{int}\theta^*$ ein F -Splitting von G stabilisiert. Dabei ist L eine Zusammenhangskomponente, die \tilde{G} erzeugt. Zudem sei $\pi_0(\tilde{G}) \simeq \mathbb{Z}/l$, wobei $p \nmid l$.
Nach 4.35 und der Jordanzerlegung 3.32 folgt daraus, daß es ein residuell halbeinfaches $\theta' \in L(F)$ gibt, das einen hyperspeziellen Punkt im Gebäude $\mathcal{B}(G, F)$ fixiert.
- (4) $\mathbf{a} \in H^1(W_F, \text{Cent}(\hat{G}))$ ist unverzweigt, genauer gesagt sogar Inflation aus $H^1(\text{Gal}(F'/F), \text{Cent}(\hat{G}))$. Der assoziierte Charakter ω von $G(F)$ sei unitär.
- (5) Die endoskopische Gruppe H ist ebenfalls unverzweigt und $\mathcal{H} = {}^L H$.
- (6) Der durch die Einbettung $\xi : \mathcal{H} \rightarrow {}^L G \quad w \mapsto m_\xi(w) \rtimes w$ definierte 1-Kozykel ist Inflation von $m_\xi(\sigma) \in Z^1(\text{Gal}(F'/F), \hat{G})$.
- (7) Die Restklassencharakteristik p von F ist groß, jedenfalls größer als der (absolute) Verzweigungsindex e_G von G , der folgendermaßen definiert ist: Zu den endlich vielen Konjugationsklassen von maximalen F -Tori bestimme jeweils den minimalen Verzweigungsindex $e(E/\mathbb{Q}_p)$ unter allen Zerfällungskörpern E . Das kleinste gemeinsame Vielfache dieser Zahlen ist e_G .

(5.18) Begründung dieser Annahmen: In diesem Abschnitt sei ausnahmsweise F ein globaler Körper. (Die Lokalisierungen an der Stelle ν werden mit F_ν , G_ν , ... bezeichnet.)

Die Annahmen (5.17) resultieren daraus, daß man sich in dieser Arbeit für fast alle Stellen einer globalen Situation interessiert, und zwar:

Gegeben seien (G, θ, \mathbf{a}) , das sind eine über einem **Zahlkörper** F definierte zusammenhängende reduktiven Gruppe G , ein F -Automorphismus θ von G und $\mathbf{a} \in H^1(W_F, \text{Cent}(\hat{G}))$, der vorgegeben ist bis auf lokal triviale Kohomologieklassen. Von θ wird zusätzlich angenommen, daß das Bild von θ endliche Ordnung in $\text{Out}(G)$ hat, d.h. die Einschränkung von θ auf das Zentrum von G hat endliche Ordnung. Das ist eine (unwesentliche?) Einschränkung der globalen Situation! Weiter sei ein globales endoskopisches Datum (H, \mathcal{H}, s, ξ) gegeben. Dies ist (nach [KS99, (2.1)]) verbatim so definiert wie in (5.3) mit einer Ausnahme: Für a' in (5.3.4) wird nur lokale Äquivalenz zu \mathbf{a} gefordert.

Sei $\psi : G \xrightarrow{\sim} G^*$ ein innerer Twist zur quasisplit Form G^* . Wähle (und fixiere) ein F -Splitting \mathbf{spl}_{G^*} von G^* und einen Automorphismus $\theta^* \in \text{Aut}(G^*, \mathbf{spl}_{G^*})$, der in $\text{Out}(G)$ dasselbe Bild hat wie $\psi \circ \theta \circ \psi^{-1}$.

Zu (2): Durch $\psi : G \rightarrow G^*$ ist ein 1-Kozykel $\psi\sigma(\psi)^{-1} \in Z^1(F, G_{ad}^*)$ definiert, der (nach dem üblichen Standardschluß) an fast allen Stellen zerfällt, d.h. für fast alle Stellen ν gibt es ein $g_\nu \in G_{sc,\nu}^*$, so daß $\text{int}g_\nu \circ \psi_\nu : G_\nu \xrightarrow{\sim} G_\nu^*$ über F_ν definiert ist. Damit kann man fast überall G_ν über F_ν mit G_ν^* identifizieren.

Da ein globaler Zerfällungskörper von G^* an fast allen Stellen unverzweigt ist, darf man G_ν und H_ν fast überall unverzweigt annehmen.

Zu (6): Die Kozykel \mathbf{a} und m_ξ in (5.17) sind ebenfalls Lokalisierungen von globalen Kozykeln an geeigneten Stellen. Daß man sie als Inflationen auffassen kann, wird z.B. für m_ξ in 5.53 gezeigt werden.

Zu (5): Daß man unter den bisher diskutierten Annahmen $\mathcal{H} = {}^L H$ annehmen darf, wird in Korollar 5.55 gezeigt werden.

Zu (3): Zunächst benutzt man das (technische)

Lemma 5.19. *An fast allen Stellen ν gibt eine (geeignete) endliche unverzweigte Erweiterung F'^ν/F_ν und ein $\theta^{\nu*} \in L_\nu(\bar{F}_\nu)$, das die gesternte Aktion von L_ν bzgl. eines (geeigneten) F_ν -Splittings \mathbf{spl} von $G_\nu = G_\nu^*$ bewirkt, so daß*

$$z_{\mathbf{spl}}(\sigma) \stackrel{\text{Def}}{=} \theta^{\nu*} \sigma(\theta^{\nu*})^{-1} \in Z^1(F'^\nu, Z)$$

(Das $z_{\mathbf{spl}}$ ist die Restriktion des in (5.1) lokalen Kozykels auf $\text{Gal}(\bar{F}_\nu/F'^\nu)$.)

Beweis: Wenn ν gut im Sinne von (2) ist und die F'^ν/F_ν genügend groß ist, hat man $\text{id} = \psi_\nu \sigma(\psi_\nu)^{-1} = \text{int}(g_\nu^{-1} \sigma(g_\nu))$ für alle $\sigma \in \text{Gal}(\bar{F}_\nu/F'^\nu)$. Dabei ist $g_\nu \in G_\nu(\bar{F}_\nu)$ das aus der Begründung von (2). Also liegt das Bild von g_ν in $G_{ad}(F'^\nu)$.

Wähle ein (globales) $g_\theta \in G_{sc}^*(\bar{F})$, so daß $\theta^* := \text{int}g_\theta \circ \psi \circ \theta \circ \psi^{-1}$ ein F -Splitting \mathbf{spl}_{G^*} von G^* stabilisiert. Nachdem man eventuell endlich viele Stellen ausschließt und F'^ν/F_ν nochmals (unverzweigt) vergrößert, darf man $g_\theta \in G_{sc}^*(F'^\nu)$ annehmen. Für fast alle ν gilt

$$\theta_\nu^* = \text{int}(g_\theta)_\nu \circ \psi_\nu \circ \theta \circ \psi_\nu^{-1} = \text{int}(\theta^*(g_\nu) \cdot (g_\theta)_\nu \cdot g_\nu^{-1}) \circ \left(\text{int}g_\nu \circ \psi_\nu \right) \circ \theta_\nu \circ \left(\text{int}g_\nu \circ \psi_\nu \right)^{-1}$$

Weil G_ν und G_ν^* über $\text{int}g_\nu \circ \psi_\nu$ identifiziert wurden (s.o), ist $\theta^{\nu*} := \theta^*(g_\nu) \cdot (g_\theta)_\nu \cdot g_\nu^{-1} \cdot \theta_\nu$ ein Vertreter für die gesternte Aktion von L_ν bzgl. $\mathbf{spl}_{G^*,\nu}$. Daher gilt für $\sigma \in \text{Gal}(\bar{F}_\nu/F'^\nu)$

$$\begin{aligned} z_{\mathbf{spl}_{G^*,\nu}}(\sigma) &= \theta^{\nu*} \sigma(\theta^{\nu*})^{-1} = \theta^*(g_\nu) \cdot (g_\theta)_\nu \cdot \underbrace{g_\nu^{-1} \cdot \sigma(g_\nu)}_{\in Z} \cdot (g_\theta)_\nu^{-1} \cdot \sigma(\theta^*(g_\nu)^{-1}) \\ &= (1 - \theta^*)(g_\nu^{-1} \sigma(g_\nu)) \in (1 - \theta)Z. \quad \square \end{aligned}$$

Die Annahme, daß ein geeignetes $\theta^* \in L(F')$ ein F -Splitting fixiere, folgt nach diesem Lemma mit Behauptung 4.27. Das man θ^* von endlicher Ordnung annehmen darf, folgt aus Korollar (4.35) nach eventueller unverzweigter Erweiterung von F'^ν

sobald man in $L(F_\nu)$ stark kompakte Elemente hat. Das dies fast überall geht, soll als nächstes gezeigt werden.

An fast allen Stellen ist der globale innere Automorphismus $\theta^l \in G_{ad}(F)$ stark kompakt. Daher ist auch $\theta_\nu^\mathbb{Z}$ beschränkt für fast alle ν , d.h. θ_ν ist stark kompakt nach (3.28). Weil $H^1(F, \kappa(G))$ endlich mit zu p teilerfremder Ordnung angenommen werden darf, gibt es ein $l_1 \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$, so daß $\theta_\nu^{l_1} \in \text{Bild}[G(F_\nu) \rightarrow G_{ad}(F_\nu)]$. Da dieser Homomorphismus in \mathbf{tJZ}_p verläuft, gibt es ein stark kompaktes $g \in G(F_\nu)^{\theta_\nu}$ mit $\text{int}g = \theta_\nu^{l_1}$. Indem man l_1 (gegebenfalls) prim zu p vergrößert, kann man g topologisch unipotent in $G(F_\nu)^{\theta_\nu}$ annehmen. Weil $p \nmid l_1$, gibt es nach Korollar 3.30.4 ein topologisch unipotent $u \in G(F_\nu)^{\theta_\nu}$ mit $u^{l_1} = g^{-1}$. Dann ist $\theta' := \text{int}u \circ \theta$ von endlicher Ordnung und man kann $\tilde{G} := G_\nu \rtimes \langle \theta' \rangle$ definieren, versehen mit einer Galoisstruktur, durch die $\theta' \in \tilde{G}(F_\nu)$. Dadurch gibt es einen Vertreter $u^{-1}\theta' \in \tilde{G}(F_\nu)$, der auf G_ν den Ausgangsautomorphismus θ_ν bewirkt.

Man darf aber nicht erwarten, daß die Ordnung von $\pi_0(\tilde{G})$ gleich der Ordnung von θ^* als äußerer Automorphismus ist. Dies zeigt das folgende

Beispiel 5.20. Sei $G = \text{Sl}_4$, $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{16}}$. Weiter sei F ein Zahlkörper oder p -adischer Körper, der i enthält und für den die Kummererweiterung $F(\zeta)/F$ den Grad 4 hat. (Z.B. $F = \mathbb{Q}(i)$ oder F ein p -adischer Körper, dessen Restklassenkörper q Elemente enthält, so daß $q \equiv 5 \pmod{16}$.) Sei

$$g_\theta := \begin{pmatrix} \zeta & & & \\ & \zeta & & \\ & & \zeta & \\ & & & -i\zeta \end{pmatrix} \in \text{Sl}_4 \quad \text{und} \quad J := \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Der Flipp ist $\theta^*(g) := J({}^t g^{-1})J^{-1}$. Sei $\tilde{G} = G \rtimes \langle \theta^* \rangle$ so über F definiert, daß $\theta^* \in \tilde{G}(F)$. Weiter sei $\theta := g_\theta^{-1} \cdot \theta^*$.

Dann definiert $\Theta = \text{int}\theta$ einen F -Automorphismus der Ordnung 2 in $\text{Aut}(G)$. Weil θ die Ordnung 8 hat, gibt es klarerweise eine reduktive F -Gruppe \tilde{G}' , die G (mit seiner F -Struktur) als Einskomponente enthält und in der θ als F -rationales Element aufgefaßt werden kann. Man könnte z.B. $\tilde{G}' = G \rtimes \langle \theta \rangle$ nehmen. (Dann ist $\pi_0(\tilde{G}') \simeq \mathbb{Z}/8$.)

Allerdings gilt die

Behauptung: \tilde{G}' ist keine F -Form von \tilde{G} .

Beweis: Sei $Z = \sqrt[4]{1}$ das Zentrum von G . Zur besseren Unterscheidung ist im Folgenden $\Theta^* := \text{int}\theta^*$ auf \tilde{G} . Weil θ^* auf Z durch Invertieren operiert, hat man $Z/(1 - \theta^*)Z = \sqrt[4]{1}/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/2$. Sei $\tau \in \text{Gal}(\bar{F}/F)$ so, daß seine Einschränkung auf $F(\zeta)$ durch $\tau(\zeta) = i\zeta$ festgelegt ist. Es gilt $g_\theta \tau(g_\theta^{-1}) = -i \notin (1 - \theta^*)Z$.

Zu zeigen ist, daß es keine F -Form von \tilde{G} gibt, so daß $g_\theta^{-1}\theta^* \in \tilde{G}(\bar{F})$ bezüglich der gewisteten Galoisaktion invariant wird. (Die Wahl von g_θ^{-1} modulo den vier

zentralen Elementen ist unerheblich für die kommenden Überlegungen.) Sei $(\sigma \mapsto c_\sigma) \in Z^1(F, \text{Aut}(\tilde{G}))$. Wie schon in (5.18) bezeichne $\sigma_* = c_\sigma \circ \sigma$ die mit c_σ getwistete Galoisaktion auf \tilde{G} . Weil \tilde{G} nur innere Automorphismen hat, kann man eine 1-Kokette $\sigma \mapsto x_\sigma \in G(\bar{F})$ wählen, so daß $c_\sigma = \text{int} x_\sigma \circ \Theta^{*n_\sigma}$ mit $n_\sigma \in \{0, 1\}$.

Man sucht also insbesondere ein c_τ mit

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad g_\theta^{-1} \theta^* &= \theta = \tau_*(\theta) = c_\tau(\tau(g_\theta^{-1} \theta^*)) = \text{int} x_\tau \circ \Theta^{*n_\tau}(-i g_\theta^{-1} \theta^*) \\ &= -i(-1)^{n_\tau} \cdot x_\tau \cdot \Theta^{*n_\tau}(g_\theta^{-1}) \cdot \Theta^*(x_\tau^{-1}) \cdot \theta^*. \end{aligned}$$

Dies äquivalent zu

$$\text{(iii)} \quad \Theta^*(x_\tau) \cdot t_{n_\tau} = g_\theta \cdot x_\tau \cdot g_\theta^{-1},$$

wobei $t_0 = i$ und

$$t_1 := -i \cdot \Theta^*(g_\theta) \cdot g_\theta^{-1} = \zeta^{-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -i & \\ & & -i \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Benutze die Bruhatzerlegung $G = UNTU$, wobei T der Diagonaltorus, U die unipotenten oberen Dreiecksmatrizen und N ein Vertretersystem für die Weylgruppe W ist, so daß Elemente aus W^{Θ^*} Θ^* -invariante Vertreter haben.

Sei $x_\tau = unt\tilde{u}$ (mit $u, \tilde{u} \in U$, $t \in T$ und $n \in N$ Vertreter für $w \in W$). Dadurch sind t und n eindeutig bestimmt. Dann folgt aus (iii)

$$\text{(iv)} \quad \underbrace{u^{\Theta^*}}_{\in U} \underbrace{n^{\Theta^*}}_{\in \Theta^*(N)} \underbrace{t^{\Theta^*} t_{n_\tau}}_{\in T} \underbrace{t_{n_\tau}^{-1} \tilde{u}^{\Theta^*} t_{n_\tau}}_{\in U} = \underbrace{g_\theta u g_\theta^{-1}}_{\in U} \underbrace{n}_{\in N} \underbrace{w^{-1}(g_\theta) \cdot g_\theta^{-1} \cdot t g_\theta \tilde{u} g_\theta^{-1}}_{\in T} \underbrace{\quad}_{\in U}$$

Indem man zuerst die Bruhatzelle betrachtet, sieht man $Bw^{\Theta^*}B = BwB$. Also ist $w \in W^{\Theta^*}$. Die Repräsentanten von W^{Θ^*} sind oben in $N \cap G^{\Theta^*}$ gewählt worden. Daher folgt aus (iv) (wegen der Eindeutigkeit des Torusanteils der Bruhatzerlegung)

$$\Theta^*(t) \cdot t_{n_\tau} = w^{-1}(g_\theta) \cdot g_\theta^{-1} \cdot t.$$

Wenn also ein Twist c_τ existiert mit der Eigenschaft (ii), muß es notwendig $w \in W^{\Theta^*}$ und $n_\tau \in \{0, 1\}$ geben, so daß

$$t_{n_\tau} \cdot g_\theta \cdot w^{-1}(g_\theta)^{-1} \in (1 - \Theta^*)T = \left\{ \text{Diag}(x, x^{-1}, x^{-1}, x) \mid x \in \mathbb{G}_m \right\}.$$

Weil man modulo $(1 - \Theta^*)T$ rechnet und $t_1 \equiv -i \pmod{(1 - \Theta^*)T}$, sucht man $w \in W^{\Theta^*}$, so daß es x gibt mit

$$\begin{pmatrix} x & & & \\ & x^{-1} & & \\ & & x^{-1} & \\ & & & x \end{pmatrix} = y \cdot g_\theta \cdot w^{-1}(g_\theta)^{-1} = y \cdot \begin{pmatrix} \zeta & & & \\ & \zeta & & \\ & & \zeta & \\ & & & -i\zeta \end{pmatrix} \cdot w^{-1} \left(\begin{pmatrix} \zeta^{-1} & & & \\ & \zeta^{-1} & & \\ & & \zeta^{-1} & \\ & & & i\zeta^{-1} \end{pmatrix} \right).$$

wobei $y \in \{\pm i\}$. Weil w die Einträge nur permutiert, kann man aus der zweiten oder dritten Zeile $x^{-1} = y$ ablesen. Kein w erlaubt aber den ersten Eintrag zu $x = -y$ zu machen. Widerspruch.

Also kann es kein x_τ geben, so daß (ii) gilt. Somit gibt es kein getwistetes τ_* , das $g_\theta^{-1} \theta^*$ invariant ließe. \square

Definition von Δ_I , Δ_{II} und Δ_{IV}

(5.21) Ab nun ist bis (5.47) ein Matching $H(F') \ni \gamma \leftrightarrow \delta \in L(F)$ stark regulärer Elemente fest vorgegeben und alle Bezeichnung von (5.9) werden benutzt. Dabei wurden folgende Wahlen gemacht:

- $z_H^*(\sigma) = \gamma^{-1}\sigma(\gamma) \in Z^1(F, \text{Cent}(H))$ wird nicht gewählt, wenn das Matching $\gamma \leftrightarrow \delta$ bekannt ist. Wenn aber nur δ festliegt und man unter mehreren möglichen Norm-Images auswählen muß/will, wählt man z_H^* . In Kapitel 8 wird das so gemacht.
- $\theta^* \in L(F')$ ist Vertreter eines Automorphismus' Θ^* , der ein F -Splitting stabilisiert, so daß gilt: $\theta^*\sigma(\theta^*)^{-1}$ geht auf $z_H^*(\sigma)$ unter der natürlichen Abbildung $\text{Cent}(G) \rightarrow \text{Cent}(H)$ (aus (5.6)). Ein zweites θ_2^* hat die Gestalt $\theta_2^* = zh\theta^*h^{-1}$ mit $\text{inh} \in G_{ad}(F)$ und $z \in \text{Cent}(G)$, so daß $z\sigma(z)^{-1} \in (1 - \theta^*)\text{Cent}(G)$. (Denn je zwei F -Splittings sind $G_{ad}(F)$ -konjugiert und ein Splitting legt den ihn stabilisierenden Vertreter in L bis auf einen zentralen Faktor fest.)
- $\mathbf{spl}_G = (\mathbb{B}, \mathbb{T}, \{X_\alpha\})$ ist ein Θ^* -stabiles F -Splitting. Es ist bis auf $G_{ad}^{\theta^*}(F)$ -Konjugation bestimmt. Genaugut kann man statt dessen auch das Splitting $\mathbf{spl}_{G_{sc}^{\Theta^*}} = (\mathbb{B}_{sc}^{\Theta^*}, \mathbb{T}_{sc}^{\Theta^*}, \{\sum_{\gamma \in I_\alpha} X_\gamma\})$ von $G_{sc}^{\Theta^*}$ wählen, denn \mathbf{spl}_G ist eindeutig bestimmt durch $\mathbf{spl}_{G_{sc}^{\Theta^*}}$. (Das folgt aus (3.11) und weil die $\{X_\alpha\}$ linear unabhängig sind in \mathfrak{g} .)
- $\eta : T_H \rightarrow T_{\theta^*}$ ist ein zulässiger Isomorphismus von T_H auf die θ^* -Koinvarianten $T_{\theta^*} = T/(1 - \theta^*)T$ eines θ^* -stabilen F -Torus' T . Dieser Torus ist bestimmt bis auf stabile Konjugation von $T_{sc}^{\theta^*}$ in $(G^{\theta^*})_{sc}$. Damit ist η bestimmt bis auf Nachschalten von inh mit $h^{-1}\sigma(h) \in T_{sc}^{\theta^*}$.
- Die Borelgruppen $(B, B_H, \mathcal{B}_H, \mathcal{B})$ sind in (5.5) nur zur Rigidifizierung der zulässigen Einbettung gewählt worden. Ihre Wahl geht nur über η in die Definition der Transferfaktoren ein, nicht direkt. Sie werden also nicht beachtet.
- g aus der Definition 5.9 ist (nach Vorgabe von T) nur bestimmt als Element der Doppelnebenklasse $T_{sc}(\bar{F}) \backslash G_{sc}(\bar{F}) / \text{Norm}(T, G)(F)$.
- $t^* = g\delta g^{-1}\theta^{*-1} = \delta^*\theta^{*-1} \in T(\bar{F})$ wird nach den Wahlen von g und θ^* selbst nicht mehr gewählt.
- χ -Data für $\Phi(T, G)_I$. Da man für sie nur die Galoisaktion braucht, die T^{θ^*} auf dem Wurzelsystem induziert, werden die χ -Data genaugenommen zur stabilen $G_{sc}^{\theta^*}$ -Konjugationsklasse von $T_{sc}^{\theta^*}$ gewählt (und nicht zu T selbst).
- a -Data für $\Phi(T, G)_I$. Wie die χ -Data werden sie zur Galoisaktion von $T_{sc}^{\theta^*}$ auf Φ_I gewählt. Die a -Data (und χ -Data) für $\Phi(T_H, H)$ sind nach Wahl von η festgelegt durch die Identifikation von $\Phi(T_H, H)$ als Teilmenge von $\Phi(T, G)_I$ in 5.7.

Dabei sei wie stets $I := \langle \theta^* \rangle$.

Definition 5.22. Sei M Levigruppe einer θ^* -stabilen Parabolischen $P \subset G$, und $\delta \in \text{Norm}(P, \tilde{G})(F) \cap L$ halbeinfach. Dann ist die Harish–Chandra–Diskriminante definiert als ($|\cdot|_F$ wurde in (1.1) normiert)

$$D_{G/M}(\delta) := \left| \det(1 - \text{Ad}(\delta)) \Big|_{\text{Lie}G/\text{Lie}M} \right|_F^{\frac{1}{2}}.$$

(5.23) **Definition von Δ_{IV} :**

$$\Delta_{\text{IV}}(\gamma, \delta) := \frac{D_{G/T_G}(\delta)}{D_{H/T_H}(\gamma)} = \frac{D_{G/T}(t^* \theta^*)}{D_{H/T_H}(\gamma)}$$

Dieser Faktor hängt von keiner der Wahlen ab.

(5.24) Δ_{II} ist definiert als der Quotient von

$$\prod_{\substack{\Gamma \cdot P_I(\alpha), \\ \alpha \text{ nicht vom} \\ \text{Typ III}}} \chi_{P_I(\alpha)} \left(\frac{S_{I\alpha}(t^*) - 1}{a_{P_I(\alpha)}} \right) \cdot \prod_{\substack{\Gamma \cdot P_I(\alpha), \\ \alpha \text{ vom Typ III}}} \chi_{P_I(\alpha)} (S_{I\alpha}(t^*) + 1),$$

wobei die Produkte (insgesamt) über alle Γ -Orbiten von Wurzeln aus $\Phi(G)_I = P_I(\Phi(T, G))$ genommen werden, durch

$$\prod_{\Gamma \cdot \alpha_H \subset \Phi(H)} \chi_{\alpha_H} \left(\frac{\alpha_H(\gamma) - 1}{a_{\alpha_H}} \right).$$

Hierbei wird über alle Γ -Orbiten von Wurzeln aus $\Phi(T_H, H)$ multipliziert.

Der Zähler hängt nicht – wie es scheinen mag – von t^* ab, denn jedes $t' \in T(\overline{F})$ mit $P_{\theta^*}(t') = \eta(\gamma) \in T_{\theta^*}(F)$ produziert dasselbe $S_{I\alpha}(t') = S_{I\alpha}(t^*)$. (Weil $\sigma(t^*) \equiv t^*$ modulo $(1 - \theta^*)T \subset \text{Kern } S_{I\alpha}$, ist $S_{I\alpha}(t^*)$ auch unabhängig vom Repräsentanten α des Γ -Orbits.)

Der Faktor Δ_{II} hängt von den Wahlen der χ -Data und der a -Data ab, aber sonst von nichts. Genauer wird bei Δ_{I} und Δ_{III} gesagt.

(5.25) **Definition von Δ_{I} :** Dieser Faktor wird nicht in G gebildet, sondern in den θ^* -Invarianten der einfach zusammenhängenden Überlagerung von G_{der} . Im Folgenden wird immer $(G_{sc})^{\theta^*}$ durch $G_{sc}^{\theta^*}$ abgekürzt. (Nach Steinberg hängt diese Gruppe zusammen.) Sei

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{TN} : H^1 \left(\Gamma, (T_{sc})^{\theta^*} \right) \times \pi_0 \left(((T_{sc}^{\theta^*})^\wedge)^\Gamma \right) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

die Tate–Nakayama–Paarung. Dann ist

$$\Delta_{\text{I}}(\gamma, \delta) := \langle \lambda_{\{a_\alpha\}}(T_{sc}^{\theta^*}), \mathbf{s}_{T, \theta} \rangle_{TN},$$

wobei die beteiligten λ und s nun definiert werden.

Zu λ : Wähle ein $h \in G_{sc}^{\theta^*}(\bar{F})$, so daß $\text{inh} : \mathbb{T}_{sc}^{\theta^*} \xrightarrow{\sim} T_{sc}^{\theta^*}$. Für $\sigma \in \Gamma = \text{Gal}(\bar{F}/F)$ bezeichne

$$\sigma_T := \text{inh}^{-1} \circ \sigma \circ \text{inh} = \text{int}(h^{-1}\sigma(h)) \circ \sigma =: \omega_T(\sigma) \circ \sigma \in W(\mathbb{T}_{sc}^{\theta^*}, G_{sc}^{\theta^*}) \rtimes \Gamma$$

die auf $\mathbb{T}_{sc}^{\theta^*}$ zurückgezogene Aktion von σ auf $T_{sc}^{\theta^*}$. Nach [LS87, (2.3)] kann man diese Aktion mit Hilfe von a -Data für $\Phi(G_{sc}^{\theta^*}, T_{sc}^{\theta^*}) \subset P_I(\Phi(G, T))$ liften zu einem Homomorphismus

$$\begin{aligned} \Gamma_T := \{\sigma_T \mid \sigma \in \Gamma\} &\longrightarrow \text{Norm}(\mathbb{T}_{sc}^{\theta^*}, G_{sc}^{\theta^*})(\bar{F}) \rtimes \Gamma \\ \sigma_T &\longmapsto \left(\prod_{\substack{\alpha \in \Phi(G)_I^+ \\ \sigma_T^{-1}\alpha > 0}} a_\alpha^{\alpha^\vee} \right) \cdot n\left(\text{int}(h^{-1}\sigma(h))\right) \rtimes \sigma \end{aligned}$$

wobei $n(\dots) \in \text{Norm}(\mathbb{T}_{sc}^{\theta^*}, G_{sc}^{\theta^*})$ der Steinbergrepräsentant in $G_{sc}^{\Theta^*}$ für den Weylgruppenanteil von σ_T ist. Daher definiert

$$\lambda_{\{a_\alpha\}}(T_{sc}^{\theta^*})(\sigma) = h \cdot \left(\prod_{\substack{\alpha \in \Phi(G)_I^+ \\ \sigma_T^{-1}\alpha > 0}} a_\alpha^{\alpha^\vee} \right) \cdot n\left(\text{int}(h^{-1}\sigma(h))\right) \cdot \left(h^{-1}\sigma(h)\right)^{-1} \cdot h^{-1}$$

einen Kozykel $\lambda \in Z^1(\Gamma, T_{sc}^{\theta^*})$. Nach [LS87, (2.3)] hängt die Kohomologieklassse von λ nur von der Wahl des Splittings $\mathbf{spl}_{G_{sc}^{\theta^*}}$ ab und nicht von den sonstigen Wahlen (a -Data, h). Die zum F -Splitting ($\text{int}g$)($\mathbf{spl}_{G_{sc}^{\theta^*}}$) berechnete Klasse von λ unterscheidet sich von der zu $\mathbf{spl}_{G_{sc}^{\theta^*}}$ berechneten um $\sigma \mapsto g^{-1}\sigma(g) \in \text{Cent}(G_{sc}^{\theta^*})$.

Zu s : Man beobachtet (unter den Vereinbarungen (5.5))

$$((T_{sc})^{\theta^*})^\wedge \simeq ((\hat{T})_{ad})_{\hat{\theta}} = (\mathcal{T}_{ad})_{\hat{\theta}_{ad}}$$

(wobei $\hat{T}_{ad} = \hat{T}/\text{Cent}(\hat{G})$). Sei $s_{T,\theta}$ das Bild von $s \in \mathcal{T}$ (aus dem endoskopischen Datum) unter $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_{ad} \rightarrow (\mathcal{T}_{ad})_{\hat{\theta}_{ad}}$. Aus der letzten Bedingung in (5.3.4) folgt, daß $s_{T,\theta}$ Γ -invariant ist (vgl. [KS99, Lemma 4.2.A.]). Daher erhält man durch Projektion ein $s_{T,\theta} \in \pi_0(((T_{sc}^{\theta^*})^\wedge)^\Gamma)$.

Anmerkung: Im Allgemeinen ist $G_{sc}^{\theta^*} = (G_{sc})^{\theta^*}$ nicht einfach zusammenhängend. Aber λ läßt sich eindeutig liften nach $H^1(\Gamma, ((T_{sc})^{\theta^*})_{sc})$, denn $\alpha^\vee \in (\Phi(G)_I)^\vee \subset X_*((T_{sc}^{\theta^*})_{sc})$ und die Steinbergrepräsentanten werden eigentlich immer in der einfach zusammenhängenden Überlagerung gebildet. Die Mehrdeutigkeit beim Rückzug von h nach $(G_{sc}^{\theta^*})_{sc}$ schlägt sich nicht auf die Kohomologieklassse des geliften λ_{sc} durch, denn sie liegt im Zentrum. (Zu Beginn des Beweises von [KS99, Theorem 4.6.A] bemerken die Autoren, daß es nicht nötig sei, zu $(G_{sc}^{\theta^*})_{sc}$ überzugehen.)

(5.26) Abhängigkeit des Faktors Δ_I von den Wahlen: Offensichtlich ist Δ_I unabhängig von der Wahl des Vertreters θ^* für Θ^* . Er ist aber auch (klarerweise) unabhängig von Θ^* in dem Sinne, daß er sich nicht ändert, wenn bei der Berechnung übergeht von $(\Theta^*, \mathbf{spl}_G, \eta, \{a_\alpha\}, \gamma, \delta)$ zu

$$(\text{int}\tilde{h} \circ \Theta^* \circ \text{int}\tilde{h}^{-1}, \tilde{h}\mathbf{spl}_G\tilde{h}^{-1}, \text{int}\tilde{h} \circ \eta, \{a_{\alpha \circ \text{int}\tilde{h}}\}, \gamma, \delta)$$

für $\tilde{h} \in G_{sc}$ mit $\text{int}\tilde{h} \in G_{ad}(F)$.

Nach [KS99, (4.2)] und [LS87, (2.3)] hängt Δ_I bei fixiertem Θ^* nur ab von der Wahl des Θ^* -stabilen F -Splittings, von der zulässigen Einbettung $\eta : T_H \rightarrow T_{\theta^*}$ und den a -Data für $\Phi(G)_{\langle \Theta^* \rangle}$.

Im Beweis von [KS99, Theorem 4.6.A] wird gezeigt, daß $\Delta_I \cdot \Delta_{II}$ unabhängig von den a -Data ist. Die Abhängigkeit von η wird von Δ_{III} neutralisiert: Genauer steht in 5.37(2) und (3) unten.

(5.27) Normierung von Δ_I : Für unverzweigtes G kann man nach Wahl eines hyperspeziellen Punktes $x \in \mathcal{B}(G, F)$ den Faktor $\Delta_I = \Delta_I^x$ normieren, d.h. von allen (anderen) Wahlen befreien. Es ist ja nur noch die Wahl des Splittings zu berücksichtigen.

Die Normierung besteht in der Forderung, daß

- (1) Θ^* den Punkt x fixiert.
- (2) das F -Splitting $\mathbf{spl}_{G_{sc}^{\Theta^*}}$ geliftet ist von \overline{G} bzgl. $i_{\Theta^*}^{-1}(x) \in \mathcal{B}(G_{sc}^{\Theta^*}, F)$. (Vgl. Definition 4.14.)

Wegen Satz 4.21.b ist der Punkt $i_{\Theta^*}^{-1}(x)$ hyperspeziell in $\mathcal{B}(G_{sc}^{\Theta^*}, F)$.

Behauptung 5.28. *Der so normierte Faktor Δ_I^x hängt nicht ab von \mathbf{spl}_G mit den Eigenschaften (5.27.2).*

Beweis: Seien \mathbf{spl} und \mathbf{spl}' zwei bzgl. $i_{\Theta^*}^{-1}(x)$ geliftete F -Splittings von $G_{sc}^{\Theta^*}$. Weil je zwei F -Paare $G_{sc}^{\Theta^*}(F)$ -konjugiert sind, kann man für die Berechnung von Δ_I o.E. annehmen, daß beide Splittings ein gemeinsames F -Paar haben, d.h. $\mathbf{spl} = (\mathbb{B}_1, \mathbb{T}_1, \{X_\alpha\})$ und $\mathbf{spl}' = (\mathbb{B}_1, \mathbb{T}_1, \{b_\alpha X_\alpha\})$ für $b_\alpha \in \mathcal{O}_F^\times$.

Nach Lemma 4.28 gibt es eine unverzweigte Erweiterung F''/F und ein $t \in \mathbb{T}_1(F'')_c \subset G_{sc}^{\Theta^*}(F'')$, so daß $(\text{int}t)(\mathbf{spl}) = \mathbf{spl}'$. In der Berechnung von Δ_I wirken sich die Splittings nach [LS87, (2.3.1)] folgendermaßen aus:

$$\lambda_{a_\alpha}(T_{sc}^{\Theta^*}, \mathbf{spl}') = \lambda_{a_\alpha}(T_{sc}^{\Theta^*}, \mathbf{spl}) \cdot (\sigma \mapsto t\sigma(t)^{-1}).$$

Daher sind beide Kohomologieklassen gleich, denn die Klasse von $t\sigma(t)^{-1}$ liegt in $H^1(F''/F, T_{sc}^{\Theta^*}(F'')_c) = 1$ (nach 3.39). \square

Definition von Δ_{III}

Hier ist die Generalannahme $\mathcal{H} = {}^L H$ aus (5.17) entscheidend. Sie erspart die Verwendung der allgemeinsten Definition von Δ_{III} aus [KS99, (4.4)]. Für den Fall $z^*(\sigma) = 1$ (bzw. bereits wenn θ^* in $\tilde{G}(F)$ gewählt werden kann) vereinfacht sich dieser Faktor noch einmal beträchtlich. (Vgl. [KS99, (5.3)].)

Für Δ_{III} hat man nur einen relativen Transferfaktor, der zwei Matchings miteinander vergleicht. Im nächsten Abschnitt wird eine Möglichkeit vorgestellt (durch Wahl besonders einfacher Vergleichsmatchings) Δ_{III} nur einem Matching zuzuordnen mit nur einer zusätzlichen Abhängigkeit von der Wahl eines hyperspeziellen Punktes x im Gebäude. In diesem Abschnitt wird der relative Faktor $\Delta_{\text{III}}(\gamma, \delta, \overline{\gamma}, \overline{\delta})$ nach [KS99, (4.4)] vorgestellt.

(5.29) Notation: Sei C eine Gruppe und $f : A \rightarrow B$ eine C -Abbildung von C -Moduln. Sei $H^r(C, A \xrightarrow{f} B)$ die r -te Hyperkohomologiegruppe des Komplexes $\dots \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow 0 \dots$, bei dem außer A im Grad 0 und B im Grad 1 nur 0 stehen. 1-Hyperkozykel werden folgendermaßen geschrieben:

$$Z^1(C, A \xrightarrow{f} B) = \{(\sigma \mapsto a(\sigma), b) \in Z^1(C, A) \times B \mid f(a(\sigma)) = b^{-1}\sigma(b)\}.$$

Dabei sind 1-Hyperkoränder Elemente der Form $(\sigma \mapsto a^{-1}\sigma(a), f(a))$. Gebraucht werden wird die (lange) exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{f} & H^0(C, B) & \xrightarrow{j} & H^1(C, A \xrightarrow{f} B) & \xrightarrow{i} & H^1(C, A) & \xrightarrow{f} & \dots \\ & & b & \mapsto & (0, b); (a(\sigma), b) & \mapsto & a(\sigma) & & \end{array}$$

(5.30) Ein zweites (Vergleichs-) Matching: Sei $\overline{\gamma} \leftrightarrow \overline{\delta}$ ein weiteres Matching stark regulärer Elemente. Alle Daten aus (5.9) sowie die χ -Data für dieses Matching erhalten einen Balken: $\overline{g}, \overline{T}, \hat{\overline{T}}, \overline{\chi}$, usw. Allerdings werden für beide Matchings dasselbe θ^* , \mathbf{spl}_G und alle Konventionen aus (5.5) gemeinsam benutzt. Inwiefern Δ_{III} davon abhängt wird in (5.37) angegeben. Insbesondere ist die zulässige Einbettung $\overline{T}_H \xrightarrow{\sim} \overline{T}_{\theta^*}$ (dual) verbunden mit Identifikationen

$$\hat{\overline{T}}_H \simeq \mathcal{T}_H \simeq \hat{T}_H \quad \text{und} \quad \hat{\overline{T}} \simeq \mathcal{T} \simeq \hat{T},$$

die (selbstverständlich) nicht die Galoisoperationen respektieren müssen. Aber immerhin werden sie (und die dualen \overline{F} -Identifikation $\overline{T} \simeq T$) benützt, um Elemente ohne notationelle Kennzeichnung in all den identifizierten Tori als gleich aufzufassen.

(5.31) Die Tori S und U : Sei

$$C := \text{Cent}(G), \quad C_{sc} := \text{Cent}(G_{sc}) \quad \text{und} \quad \hat{Z} := \text{Cent}(\hat{G})^\circ!$$

Zur Erinnerung: $T_{ad} = T/C$. Man definiert (vgl. [LS90, Beweis von 3.5.A])

$$S := T \times \overline{T} / \left\{ (z, z^{-1}) \mid z \in C \right\} \quad \text{und} \quad U := T_{sc} \times \overline{T}_{sc} / \left\{ (z, z^{-1}) \mid z \in C_{sc} \right\}.$$

Betrachte

$$(v) \quad \begin{array}{ccccc} T \times \bar{T} & \longrightarrow & S & \xrightarrow{\sim} & T \times \bar{T}_{ad} \\ (t, \bar{t}) & \longmapsto & (t, \bar{t}) \bmod C & \longmapsto & (t \cdot \bar{t}, \bar{t} \bmod C) \end{array}$$

Die linke Abbildung ist galoisäquivalent, die rechte (Isomorphie) ist (natürlich) nicht über F definiert. Aber der Isomorphismus ermöglicht eine Identifikation von \hat{S} mit $\hat{T} \times \hat{T}_{sc}$. Dabei ist mit \hat{T}_{sc} strenggenommen der Torus $(\hat{T})_{sc}$ in der einfach zusammenhängenden Überlagerung $(\hat{G})_{sc}$ der derivierten Gruppe von \hat{G} gemeint. (Denn $X_*((\hat{T})_{sc}) = \mathbb{Z}[\Phi^\vee(\hat{G})] = \mathbb{Z}[\Phi(G)] = X^*(T_{ad})$.)

Durch die Beteiligung des Isomorphismus aus (v) ist die Galoisaktion auf $\hat{S} = \hat{T} \times \hat{T}_{sc}$ etwas verwickelt. Dual zu (v) hat man

$$\begin{array}{ccc} \hat{T} \times \hat{T} & \longleftarrow & \hat{S} \xleftarrow{\sim} \hat{T} \times \hat{T}_{sc} \\ \\ \begin{array}{ccc} (t, t \cdot pr(t_{sc})) & \longleftarrow & (t, t_{sc}) \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ (\sigma_T(t), \sigma_{\bar{T}}(t \cdot pr(t_{sc}))) & \longleftarrow & \sigma_S(t, t_{sc}) \end{array} \end{array}$$

Als von S herkommende Galoisaktion σ_S auf \hat{S} ergibt sich daraus:

$$\sigma_S(t, t_{sc}) = \left(\sigma_T(t), \sigma_T(\tilde{t})^{-1} \sigma_{\bar{T}}(\tilde{t}) \sigma_{\bar{T}}(t_{sc}) \right),$$

wobei $\tilde{t} \in (\hat{T})_{sc} \times \hat{Z}$ ein Lift von $t \in (\hat{T})_{der} \cdot \hat{Z}$ ist und $\sigma_T, \sigma_{\bar{T}}$ die von T bzw. \bar{T} herkommende Aktion von $\sigma \in \text{Gal}(\bar{F}/F)$ auf $\hat{T} \simeq \mathcal{T} \simeq \hat{T}$ ist. (Beachte: $\hat{Z} := \text{Cent}((\hat{G}))^\circ$ ist ein Torus!)

Analoges gilt für die Aktion σ_U auf $\hat{U} = (\hat{T})_{ad} \times (\hat{T})_{sc}$.

(5.32) Kottwitz–Shelstad–Paarung: Kottwitz und Shelstad konstruieren in [KS99, Appendix A] eine Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle_{KS}$ von 1-Hyperkohomologiegruppen:

$$(vi) \quad H^1(F, U \xrightarrow{1-\theta} S) \times H^1(W_F, \hat{S} \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \hat{U}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times.$$

Dabei ist genauer $1-\theta : U \xrightarrow{\text{Proj.}} S \xrightarrow{1-\theta} S$ und $1-\hat{\theta} : \hat{S} \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \hat{S} \xrightarrow{\text{Proj.}} \hat{U}$. Die Paarung kombiniert die Langlandsdualität aus (3.34)

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_L : H^1(W_F, \hat{S}) \times S(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

und die Tate–Nakayama–Paarung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{TN} : H^1(F, U) \times \pi_0(\hat{U}^\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

Genauer gilt nach [KS99, (A.3.13+14)]

$$(vii) \quad \boxed{\langle j(t), \hat{z} \rangle_{KS} = \langle t, \hat{i}(\hat{z}) \rangle_L^{-1}} \quad \text{und} \quad \boxed{\langle z, \hat{j}(\hat{t}) \rangle_{KS} = \langle i(z), \hat{t} \rangle_{TN} ,}$$

wobei i, j (bzw. \hat{i}, \hat{j}) die Abbildungen aus der Spektralsequenz (5.29)

$$(viii) \quad \dots \rightarrow H^0(F, S) \xrightarrow{j} H^1(F, U \rightarrow S) \xrightarrow{i} H^1(F, U) \rightarrow \dots$$

bzw.

$$\dots \rightarrow H^0(W_F, \hat{U}) \xrightarrow{\hat{j}} H^1(W_F, \hat{S} \rightarrow \hat{U}) \xrightarrow{\hat{i}} H^1(W_F, \hat{S}) \rightarrow \dots$$

sind (vgl. (5.29)). Dabei wurde $\hat{t} \in \hat{U}^{W_F}$ mit seinem Bild in $\pi_0(\hat{U}^\Gamma)$ identifiziert.

(5.33) Definition von Δ_{III} : Im Folgenden werden $V(\sigma) \in Z^1(F, U \xrightarrow{1-\theta} S)$ und $A(w) \in Z^1(W_F, \hat{S} \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \hat{U})$ definiert. Dann ist

$$\Delta_{\text{III}}(\gamma, \delta, \bar{\gamma}, \bar{\delta}) := \langle V(\sigma), A(w) \rangle_{KS}.$$

(5.34) Definition von $V(\sigma)$: Der 1-Hyperkozykel mit Klasse in $H^1(F, U \xrightarrow{1-\theta} S)$ wird konstruiert durch

$$v(\sigma) = g\sigma(g)^{-1} \in T_{sc}(\bar{F}) \quad g \text{ wie in (5.9).}$$

In G rechnet man (mit $z^*(\sigma) \stackrel{\text{Def}}{=} \theta^*\sigma(\theta^*)^{-1}$ aus (5.2))

$$\begin{aligned} z^*(\sigma)t^*\sigma(t^*)^{-1} &= \delta^*\sigma(\delta^*)^{-1} = \delta^* \cdot \sigma(g\delta g^{-1})^{-1} = \delta^*\sigma(g)g^{-1}\delta^{*-1}g\sigma(g)^{-1} \\ &= (1 - \theta^*)v(\sigma). \end{aligned}$$

Analoges gilt für das zweite Matching. (Man muß nur $g, v, \delta^*, \delta, t^*$ mit Balken versehen!) Also nehme

$$V(\sigma) := \left(\overline{(v^{-1}(\sigma), \bar{v}(\sigma))}, \overline{(t^*, \bar{t}^{*-1})} \right) \in Z^1(F, \underbrace{(T_{sc} \times \bar{T}_{sc})/C_{sc}}_{=U} \xrightarrow{1-\theta} \underbrace{(T \times \bar{T})/C}_{=S}).$$

(5.35) Definition von $A(w)$:

Die Konstruktion eines 1-Hyperkozykels in $Z^1(W_F, \hat{S} \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \hat{U})$ ist komplizierter. Zuerst werden zwei Homomorphismen ξ_{T_H}, ξ_T definiert. Durch die Wahl von χ -Data für $\Phi^\vee(\hat{H}, \mathcal{T}_H)$, versehen mit der Galoisaktion durch die Identifikation $\Phi^\vee(\hat{H}, \mathcal{T}_H) \xleftarrow{1-1} \Phi(H, T_H)$, hat man nach Langlands Satz 3.41

$$\xi_{T_H} : {}^L T_H \hookrightarrow {}^L H .$$

Die zweite Abbildung entsteht aus

$$\xi_T : {}^L T_H \xleftarrow{\sim} {}^L (T_{\theta^*}) \hookrightarrow G^{\hat{\theta}^\circ} \rtimes W_F \hookrightarrow {}^L G .$$

Hierbei ist die linke Abbildung dual zur zulässigen Einbettung $T_H \xrightarrow{\sim} T_{\theta^*}$, die mittlere geschieht durch die Wahl von χ -Data für $\Phi^\vee(\hat{G}^{\hat{\theta}^\circ}, \mathcal{T}^{\hat{\theta}^\circ}) \subset (\Phi(\hat{G}, \mathcal{T})_{\hat{\theta}})^\vee \xleftarrow{1-1} (\Phi^\vee(G, T)_{\theta^*})^\vee$ nach Langlands (3.41), und die letzte Inklusion ist klar. Nun hat man folgende Situation:

$$\begin{array}{ccccc} {}^L T_H & \xrightarrow{\xi_T} & \xi_T({}^L T_H) \cdot \mathcal{T} & \hookrightarrow & {}^L G \\ & & \uparrow & & \uparrow \xi \\ {}^L T_H & \xrightarrow[\xi_{T_H}]{\sim} & \xi_{T_H}({}^L T_H) & \hookrightarrow & {}^L H \end{array}$$

Hierin wird $a_T \in Z^1(W_F, \hat{T})$ definiert als der Fehler zwischen ξ_{T_H} und ξ_T , nämlich

$$a_T(w) \cdot \xi_T(w) = (\xi \circ \xi_{T_H})(w) \quad (\text{für } w \in W_F).$$

Analog wird $a_{\overline{T}}$ definiert als $a_{\overline{T}}(w) = \xi_{\overline{T}}(w)^{-1} \cdot (\xi \circ \xi_{\overline{T}_H})(w)$, wobei $\xi_{\overline{T}_H} : {}^L \overline{T}_H \hookrightarrow {}^L H$ durch χ -Data für die Identifikation $\Phi(\hat{H}, \mathcal{T}_H) \xleftarrow{1-1} \Phi^\vee(H, \overline{T}_H)$ konstruiert wird und $\xi_{\overline{T}} : {}^L \overline{T}_H \xrightarrow{\sim} {}^L (\overline{T}_{\theta^*}) \hookrightarrow {}^L G$ durch χ -Data für $\Phi(\hat{G})_I \xleftarrow{1-1} \Phi^\vee(G, \overline{T})_{\theta^*}$ und die zulässige Einbettung $\overline{T}_H \xrightarrow{\sim} \overline{T}_{\theta^*}$ (analog zu oben).

In [KS99, Lemma 4.4.B] wird gezeigt, daß

- (1) $a_{\overline{T}}(w)a_T(w)^{-1}$ sich (natürlich/eindeutig) liften läßt zu $x_{sc}(w) \in Z^1(W_F, \hat{\overline{T}}_{sc})$.
- (2) $(1 - \hat{\theta})\left(a_T(w), x_{sc}(w)\right) = (\overline{s}, 1) \cdot \sigma_U\left(\overline{s}^{-1}, 1\right)$

so daß der angekündigte 1-Hyperkozykel ist:

$$A(w) := \left((a_T(w), x_{sc}(w))^{-1}, (\overline{s}, 1) \right) \in Z^1(W_F, \underbrace{\hat{T} \times \hat{\overline{T}}_{sc}}_{=\hat{S}} \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \underbrace{(\hat{T})_{\text{ad}} \times (\hat{\overline{T}})_{sc}}_{=\hat{U}}).$$

(5.36) Eigenschaften von $x_{sc}(w)$: Von $x_{sc}(w)$ wird benutzt werden, daß seine Kohomologieklassse trivial bzw. unverzweigt ist, falls sowohl $a_{\overline{T}}(w)$ als auch $a_T(w)$ die jeweilige Eigenschaft haben. Außerdem werden folgende Kompatibilitäten benutzt:

$$(ix) \quad \left\langle (a_T(w), x_{sc}(w)) , (1, \bar{t}) \right\rangle_L = \left\langle a_{\overline{T}}(w), \bar{t} \right\rangle_L ,$$

wobei links die Langlandspaarung für S steht und rechts die Langlandspaarung für \overline{T} . Analog ist für $t \in T(F)$

$$(x) \quad \left\langle (a_T(w), x_{sc}(w)) , (t, 1) \right\rangle_L = \left\langle a_T(w), t \right\rangle_L .$$

Sowohl $((1, \bar{t})$ als auch $(t, 1)$ mögen hierbei für ihr Bild in $T \times \bar{T} / \text{Cent}(G) = S$ stehen. Alle diese Eigenschaften kann man an der Konstruktion in [KS99, Beweis von Lemma 4.4.B] ablesen.

(5.37) Abhängigkeit des Faktors Δ_{III} von Wahlen: Der Faktor Δ_{III} hängt (bei fixiertem $G, H, \gamma \leftrightarrow \delta, \bar{\gamma} \leftrightarrow \bar{\delta}$) von der Wahl von $\Theta^*, \eta, \bar{\eta}$ und den verschiedenen χ -Data ab. Alle anderen Wahlen haben (danach) (mehr oder weniger offensichtlich) keinen Einfluß Δ_{III} .

- (1) Δ_{III} hängt nicht ab von θ^* : Genauer bleibt Δ_{III} invariant, wenn man zu seiner Berechnung von $(\theta^*; \gamma, \delta, T, \eta, \{\chi_\alpha\}; \bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{T}, \bar{\eta}, \{\chi_{\bar{\alpha}}\})$ übergeht zu

$$(hz\theta^*h^{-1}; \gamma, \delta, hTh^{-1}, \text{inh} \circ \eta, \{\chi_{\alpha \circ \text{int } h^{-1}}\}; \bar{\gamma}, \bar{\delta}, h\bar{T}h^{-1}, \text{inh} \circ \bar{\eta}, \{\chi_{\bar{\alpha} \circ \text{int } h^{-1}}\}),$$

wobei $z \in \text{Cent}(G)$ und $h \in G_{sc}$, so daß $\text{inh} \in G_{ad}(F)$ (und $z\sigma(z)^{-1} \in (1 - \theta^*) \text{Cent}(G)$).

Zum Beweis rechnet man $V(\sigma)$ mit dem alternativen $\theta' = zh\theta^*h^{-1}$ in (5.13) aus: Mit den Bezeichnungen von dort und $z_\sigma := h\sigma(h)^{-1} \in \text{Cent}(G_{sc})$ hat man

$$v'(\sigma) := (hg)\sigma(hg)^{-1} = hg\sigma(g)^{-1}h^{-1}z_\sigma = \text{inh}(v(\sigma)) \cdot z_\sigma$$

und analog $\bar{v}'(\sigma) = \text{inh}(\bar{v}(\sigma)) \cdot z_\sigma$. Daher gilt in $U = T_{sc} \times \bar{T}_{sc} / \{(z, z^{-1})\}$ gerade $\overline{(v'(\sigma)^{-1}, \bar{v}'(\sigma))} = \overline{(\text{inh}(v(\sigma)^{-1}), \text{inh}(\bar{v}(\sigma)))}$. Ebenso ist

$$\overline{(t', \bar{t}'^{-1})} = \overline{(ht^*h^{-1}z^{-1}, (h\bar{t}^{*-1}h^{-1}z))} = \overline{(\text{inh}(t^*), \text{inh}(\bar{t}^{*-1}))}$$

in $S = T \times \bar{T} / \{(z, z^{-1})\}$. Also ist das bzgl. θ' berechnete $V(\sigma)$ das durch $\text{inh} \in G_{ad}(F)$ auf die entsprechenden Tori zu $T' \times \bar{T}' = \text{inh}(T \times \bar{T})$ übertragene $V(\sigma)$, das mit θ^* berechnet wurde. Die restliche Ingredienz für die Kottwitz–Shelstad–Paarung $A(w)$ wird in der dualen Gruppe berechnet, ist also unabhängig von der Wahl von Θ^* innerhalb seiner $G_{ad}(F)$ -Konjugationsklasse. \square

- (2) $\Delta_{\text{I}}(\gamma, \delta) \cdot \Delta_{\text{III}}(\gamma, \delta; \bar{\gamma}, \bar{\delta})$ ist nach [KS99, Beweis von Theorem 6.4.A] invariant, wenn $(\eta : T_H \rightarrow T_{\theta^*}, \{\chi_\alpha\})$ ersetzt wird durch $(\text{inh} \circ \eta, \{\chi_{\alpha \circ \text{int } h^{-1}}\})$ für ein $h \in G_{sc}^{\theta^*}(\bar{F})$ mit $h^{-1}\sigma(h) \in T_{sc}^{\theta^*}(\bar{F})$.
- (3) Analog bleibt $\Delta_{\text{I}}(\bar{\gamma}, \bar{\delta})^{-1} \cdot \Delta_{\text{III}}(\gamma, \delta; \bar{\gamma}, \bar{\delta})$ dasselbe, wenn man zu seiner Berechnung statt $(\bar{\eta} : \bar{T}_H \rightarrow \bar{T}_{\theta^*}, \{\chi_\alpha\}_{\alpha \in \Phi(\bar{T})_I})$ wie eben $(\text{inh} \circ \bar{\eta}, \{\chi_{\alpha \circ \text{int } h^{-1}}\})$ benutzt mit $h^{-1}\sigma(h) \in \bar{T}_{sc}^{\theta^*}(\bar{F})$.
- (4) $\Delta_{\text{II}}(\gamma, \delta) \cdot \Delta_{\text{III}}(\gamma, \delta; \bar{\gamma}, \bar{\delta})$ ist nach [KS99, Beweis von Theorem 6.4.A] unabhängig von den χ -Data für $\Phi(T)_I$.
- (5) Ebenso ist $\Delta_{\text{II}}(\bar{\gamma}, \bar{\delta})^{-1} \cdot \Delta_{\text{III}}(\gamma, \delta; \bar{\gamma}, \bar{\delta})$ unabhängig von den χ -Data für $\Phi(\bar{T})_I$.

Von allen anderen Wahlen für die Definition der Transferfaktoren hängt Δ_{III} nicht ab (a -Data, \mathbf{spl}_G , ...).

Lemma 5.38. *Seien z_H, \bar{z}_H die Bilder von $z, \bar{z} \in \text{Cent}(G)(F)$ unter der natürlichen Abbildung $\text{Cent}(G)(F) \twoheadrightarrow \text{Cent}(G)_{\theta^*}(F) \hookrightarrow \text{Cent}(H)(F)$ aus (5.6). Dann gilt*

$$\Delta_{\text{III}}(z_H \gamma, z \delta; \bar{z}_H \bar{\gamma}, \bar{z} \bar{\delta}) = \langle a_T(w), z \bar{z}^{-1} \rangle_L \cdot \Delta_{\text{III}}(\gamma, \delta; \bar{\gamma}, \bar{\delta}),$$

wobei auf beiden Seiten diesselben χ -Data und zulässigen Einbettungen benutzt werden.

Beweis: Beim Übergang von $(\gamma, \delta; \bar{\gamma}, \bar{\delta})$ zu $(z_H \gamma, z \delta; \bar{z}_H \bar{\gamma}, \bar{z} \bar{\delta})$ ändert sich von allen Zutaten zu Δ_{III} aus (5.34) – (5.35) nur (t^*, \bar{t}^{*-1}) zu $(zt^*, (\bar{z}\bar{t})^{*-1}) \simeq (z\bar{z}^{-1}t^*, \bar{t}^{*-1}) \in S = T \times \bar{T} / \text{Cent}(G)$.

Der Quotient der beiden $V(\sigma)$ berechnet zu den jeweiligen Doppelmatchings ist also $j(\overline{(z\bar{z}^{-1}, 1)}) \in H^1(F, U \rightarrow S)$ und die Kompatibilität (vii) in (5.32) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{\text{III}}(z_H \gamma, z \delta; \bar{z}_H \bar{\gamma}, \bar{z} \bar{\delta})}{\Delta_{\text{III}}(\gamma, \delta; \bar{\gamma}, \bar{\delta})} &= \left\langle \left((a_T(w), x_{sc}(w))^{-1}, (\bar{s}, 1) \right), j(\overline{(z\bar{z}^{-1}, 1)}) \right\rangle_{KS} \\ &= \left\langle (a_T(w), x_{sc}(w)), \overline{(z\bar{z}^{-1}, 1)} \right\rangle_L \stackrel{(5.36)}{\stackrel{(\mathbf{x})}{=}} \langle a_T(w), z\bar{z}^{-1} \rangle_L. \quad \square \end{aligned}$$

Normierung von Δ_{III}

(5.39) Wahlen für diesen Abschnitt: Sei $x \in \mathcal{B}(G, F)$ hyperspeziell gewählt, so daß ein $\theta^* \in L(F')$ existiert, das zum einen x fixiert und zum anderen ein F -Splitting. Diese Daten werden im ganzen Paragraphen fixiert. Sie existieren nach der fundamentalen Annahme (5.17.3). Sei $\Theta^* := \text{int}\theta^*$ und F' ein Zerfällungskörper von G und H , endlich und unverzweigt über F . Wie üblich bezeichnet (\mathbb{B}, \mathbb{T}) ein θ^* -stabiles F -Paar, das über F' zerfällt, und $\tilde{\mathbb{T}} = \text{Cent}(\mathbb{T}^{\theta^*}, \tilde{G})$. Insbesondere ist $\theta^* \in \tilde{\mathbb{T}}(F')_x$.

(5.40) Weil es für die folgende Konstruktion essentiell ist, sei hier erinnert, daß man $W(\mathcal{T}, \hat{G})$ und $W := W(\mathbb{T}, G)$ galoisäquivalent identifiziert hat (durch die Definition von ${}^L G$), denn die Galoisaktion auf \hat{G} wird durch $X^*(\mathbb{T}) = X_*(\mathcal{T})$ übertragen. Zudem geht die $\hat{\theta}$ -Aktion auf der einen Seite in die Aktion von θ^* auf der anderen Seite über. Mit (3.7) darf man identifizieren

$$(xi) \quad W(\mathcal{T}, \hat{G})^{\hat{\theta}} = W(\mathbb{T}, G)^{\theta^*} \stackrel{\text{Def}}{=} W^{\theta^*} = W\left((\mathbb{T}^{\theta^* \circ})_{sc}, (G^{\theta^* \circ})_{sc}\right)$$

so daß die Galoisaktion auf allen Gruppen respektiert werden.

(5.41) "Der" Torus T_ξ und erlaubte Tori: Hier soll zu x (und dem unverzweigten endoskopischen Datum) eine kanonische $G(F)$ -Konjugationsklasse $[\tilde{T}_\xi]$ eines F -Torus von G (mit gewissen Eigenschaften) zugeordnet werden. Innerhalb

dieser Klasse werden die für die Normierung von Δ_{III} relevanten Tori als "erlaubt" ausgezeichnet.

Wie in (5.8) gezeigt, definiert die endoskopische Einbettung ξ (wegen (5.17)) einen Kozykel $m_\xi(\sigma) \in Z^1(F'/F, \text{Norm}(\mathcal{T}^\theta, \hat{G}))$. Nach den Identifikationen **(xi)** in (5.40) ist zu ξ durch $m_\xi(\sigma)$ eine Kohomologieklassse $\omega_\xi(\sigma) \in H^1(F'/F, W(\mathbb{T})^{\theta*})$ zugeordnet. Nach (3.23) definiert $\omega_\xi(\sigma)$ eine schwach stabile Konjugationsklasse $[\tilde{T}_\xi]_{\text{sch.st.}}$ innerhalb der $G(F')$ -Konjugationsklasse von $\tilde{\mathbb{T}}$.

Nach Satz 4.44 gibt es ein $g \in G_{sc}(F')_x$, so daß $\text{int}g(\mathbb{T}) \in [T_\xi]_{\text{sch.st.}}$. Die $G(F)$ -Konjugationsklassen (innerhalb der schwach stabilen Konjugationsklasse) werden beschrieben durch die Urbilder von $\omega_\xi(\sigma)$ in $H^1(F'/F, N(\tilde{\mathbb{T}})(F'))$, wobei $N(\tilde{\mathbb{T}}) = \text{Norm}(\tilde{\mathbb{T}}, G)$. Man legt die $G(F)$ -Konjugationsklasse von $[\tilde{T}_\xi]$ fest durch die Forderung, daß der durch $\text{int}g(\mathbb{T}) = T_\xi$ definierte Kozykel $g\sigma(g)^{-1} \in Z^1(F'/F, N(\tilde{\mathbb{T}})(F'))$ Werte in $G(F')_x$ haben soll. Diese Definition ist möglich wegen der Behauptung 5.42.b.

Ein Torus $\tilde{T} \subset [\tilde{T}_\xi]$ heißt **erlaubt**, wenn er $G(F')_x$ -konjugiert ist zu einem Torus $\tilde{\mathbb{T}}'$, dessen Einskomponente \mathbb{T}' maximal F -split (in G) ist, über F' zerfällt und für die $\mathbb{T}'(F')_c \subset G(F')_x$ gilt. Mit anderen Worten: \mathbb{T}' ist generische Faser eines abgeschlossenen Untergruppenschemas von \mathcal{G} , wobei \mathcal{G} nach Satz 4.5 gebildet ist, so daß $\mathcal{G}(\mathcal{O}_{F'}) = G(F')_x$.

Die Definition von $[\tilde{T}_\xi]_{\text{sch.st.}}$ ist unabhängig von $\tilde{\mathbb{T}}$ und (\mathbb{B}, \mathbb{T}) , denn je zwei F' -Splittori sind F' -konjugiert und je zwei F -Paare sind $G(F)$ -konjugiert. Daher ist $[\tilde{T}_\xi]_{\text{sch.st.}}$ auch unabhängig von Θ^* (und von θ^* ohnehin), denn $W^\Theta = \text{Norm}(\tilde{\mathbb{T}}, G)/\mathbb{T}$. Die Konstruktion ergibt somit, daß die Konjugationsklasse $[\tilde{T}_\xi]$ nur von $x \in \mathcal{B}(G, F)$ (und dem endoskopischen Datum) abhängt.

Behauptung 5.42.

- (a) *Es gibt ein $g \in (G^{\Theta^* \circ})_{sc}(F')_x$, so daß $\tilde{T}_\xi = \text{int}g(\tilde{\mathbb{T}})$ in der $G(F)$ -Konjugationsklasse $[\tilde{T}_\xi]$ aus (5.41) liegt. D.h. es gibt erlaubte Tori, die θ^* enthalten.*
- (b) *Es gibt höchstens einen Lift von $\omega_\xi(\sigma)$ nach $H^1(F'/F, N(\tilde{\mathbb{T}})(F'))$, der einen Kozykel in $n(\sigma) \in N(\tilde{\mathbb{T}})(F')_x$ besitzt.*
- (c) *Je zwei erlaubte Tori aus $[\tilde{T}_\xi]$ sind $G(F)_x$ -konjugiert.*

Beweis: Zu (a): Das wurde in Satz 4.44 gezeigt.

Zu (b): Seien $n(\sigma)$ und $n'(\sigma)$ zwei Lifts von $\omega_\xi(\sigma)$ nach $Z^1(F'/F, N(\tilde{\mathbb{T}})(F')_x)$. Es reicht, zu zeigen, daß es ein $t \in \mathbb{T}$ gibt, so daß

$$n'(\sigma) = t \cdot n(\sigma) \cdot \sigma(t) = t \cdot \left(\omega_\xi(\sigma) \circ \sigma \right) (t^{-1}) \cdot n(\sigma) = tg^{-1} \cdot \sigma \left(gtg^{-1} \right)^{-1} \cdot g \cdot n(\sigma).$$

wobei $g \in G(F')$, so daß $\omega_\xi(\sigma) = \text{int}(g^{-1}\sigma(g))$ berandet.

Es soll also gezeigt werden, daß der Kozykel (!) $a(\sigma) := gn'(\sigma)n(\sigma)^{-1}g^{-1}$ trivial

ist in $H^1(F'/F, T_\xi(F'))$. Weil $n(\sigma)$ und $n'(\sigma)$ beide x fixieren, liegt $a(\sigma)$ bereits in $H^1(F'/F, T_\xi(F')_c) = 1$ (nach Lemma 3.39).

Zu (c): Sei $\tilde{T}_\xi = g\tilde{\mathbb{T}}g^{-1}$ mit $g \in G(F')_x$ und $W_\xi := W(T_\xi, G)$ und $N_\xi = \text{Norm}(\tilde{T}_\xi, G) = \overline{T_\xi \cdot \text{Norm}(T_\xi, G)^{\Theta^*}}$. Zu zeigen ist, daß der Kern von

$$H^1(F'/F, N_\xi(F')_x) \longrightarrow H^1(F'/F, N_\xi(F'))$$

trivial ist. Weil x hyperspeziell und Θ^* -stabil ist, kann man $W_\xi^{\Theta^*} \subset N_\xi(F')_x$ auffassen. Daher hat man die exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow N_\xi(F')_x \longrightarrow N_\xi(F') \longrightarrow T_\xi(F')/T_\xi(F')_x \longrightarrow 1.$$

Weil T_ξ über F' zerfällt, stiftet der Ordnungshomomorphismus den Isomorphismus $T_\xi(F')/T_\xi(F')_x \simeq X_*(T_\xi)$. Sei $\Gamma = \text{Gal}(F'/F)$. Der Ordnungshomomorphismus ergibt auch $T_\xi(F)/T_\xi(F)_x \simeq X_*(T_\xi)^\Gamma$, denn F'/F ist unverzweigt. Daher ist in der langen exakten Sequenz (zu der kurzen oben)

$$1 \rightarrow N_\xi(F)_x \rightarrow N_\xi(F) \twoheadrightarrow X_*(T_\xi)^\Gamma \rightarrow H^1(\Gamma, N_\xi(F')_x) \rightarrow H^1(\Gamma, N_\xi(F')).$$

Also ist die Injektivität oben bewiesen. \square

Definition 5.43. Gegeben sei ein hyperspezieller Punkt x im Gebäude $\mathcal{B}(G, F)$. Sei

$$\Delta_{\text{III}}^x(\gamma, \delta) := \Delta_{\text{III}}(\gamma, \delta, \overline{\gamma}, \overline{\delta}),$$

wenn für das Matching $\overline{\gamma} \leftrightarrow \overline{\delta}$ gilt

- $\overline{\delta}$ ist residuell halbeinfach, fixiert $x \in \mathcal{B}(G, F)$ und ist stark regulär mod p . (Vgl. 4.9)
- $\text{Cent}(G^{\overline{\delta}}, \tilde{G})$ ist erlaubtes Element in der $G(F)$ -Konjugationsklasse $[\tilde{T}_\xi]$ aus (5.41), das θ^* enthält.

und folgende Wahlen zur Berechnung von Δ_{III} benutzt werden:

- Θ^* fixiert x .
- Der Torus \overline{T} in (5.9.1) ist erlaubt. Das geht nach Lemma 5.44.
- $\overline{\chi}_\alpha(x) = (-1)^{\text{val}_F(x)}$ für alle $x \in F^{\text{unv}}$ und alle $\alpha \in \Phi(G)_I$.

Die Wahl der $\overline{\chi}$ -Data ist möglich, weil \tilde{T}_ξ unverzweigt ist (vgl. 3.43). Nach dem folgenden Lemma 5.44 gibt es solche Matchings. Die Wohldefiniertheit ist Satz 5.45.

Anmerkung: Aus der ersten Bedingung folgt, daß auch $\overline{\gamma}$ stark regulär und stark kompakt ist. Wegen Lemma 5.44.a enthält $\overline{T}_H := \text{Cent}(\overline{\gamma}, H)$ einen maximalen F -Splittorus von H .

Lemma 5.44. *Sei $\tilde{T}_\xi = g\tilde{\mathbb{T}}g^{-1}$ (mit $g \in G(F')_x^{\ominus*}$) ein erlaubter Torus wie in 5.42 und $T_\xi = \tilde{T}_\xi^\circ$.*

- (a) *Es gibt eine zulässige Einbettung $\mathbb{T}_H \xrightarrow{\sim} (T_\xi)_{\theta^*}$.*
- (b) *Es gibt ein stark reguläres, stark kompaktes Element in $\tilde{T}_\xi(F) \cap L$, das x fixiert.*
- (c) *Es gibt ein Matching $\gamma \leftrightarrow \delta$ stark kompakter, mod p stark regulärer Elemente $\delta \in \tilde{T}_\xi(F)_x \cap L$, $\gamma \in \mathbb{T}_H(\bar{F})$ mit $\gamma^{-1}\sigma(\gamma) = z_H^*(\sigma)$.*

Beweis: Zu (a): Dies ist gerade ein wesentlicher Teil der Konstruktion von T_ξ in (5.41). Man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X^*(\mathbb{T}_H) & \xrightarrow{\sim} & X^*(\mathbb{T}_{\theta^*}) & \longrightarrow & X^*(\mathbb{T}) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ X_*(\mathcal{T}_H) & \xrightarrow{\xi} & X_*(\mathcal{T}^{\hat{\theta}^\circ}) & \xrightarrow{\text{Inkl.}} & X_*(\mathcal{T}) \end{array}$$

Für $\sigma \in \text{Gal}(\bar{F}/F)$ wird die Aktion $\sigma_{\mathbb{T}_H}$ auf den identifizierten Gittern links übertragen nach rechts zu der Aktion $\omega_\xi(\sigma) \circ \sigma_{\mathbb{T}}$. Durch $(\text{int}g)^* : X^*(T_\xi) \xrightarrow{\sim} X^*(\mathbb{T})$ überträgt sich die von σ auf $X_*(T_\xi)$ induzierte Aktion zur Aktion $\text{int}(g^{-1}\sigma(g)) \circ \sigma_{\mathbb{T}} = \omega_\xi(\sigma) \circ \sigma_{\mathbb{T}}$ auf $X_*(\mathbb{T})$. Daher ist die Zusammensetzung $X^*(\mathbb{T}_H) \hookrightarrow X^*(T_\xi)$ galoisäquvariant.

Zu (b): Es gibt ein $\delta \in \tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L$, das x fixiert. (Das sieht man, indem man mit Lemma 3.39 den Kozykel $z^*(\sigma) := \theta^*\sigma(\theta^*)^{-1} \in Z^1(F'/F, \mathbb{T}(F')_x)$ zerfällt.) Sei $\delta' := g\delta g^{-1} \in \tilde{T}_\xi(F')_x$. Um nachzurechnen, daß $a(\sigma) := \delta\sigma(\delta)^{-1} \in Z^1(F'/F, T_\xi(F')_c)$, zerlege $\delta = k\theta^*$. Dabei ist $k \in \mathbb{T}_{\text{der}}(F')_x$ und $\theta^* \in \tilde{\mathbb{T}}(F')$. Bezeichne $n_\sigma := g^{-1}\sigma(g) \in \text{Norm}(\mathbb{T}^{\theta^{*\circ}}, G^{\theta^{*\circ}})$. Dann rechnet man ($\sigma \in \text{Gal}(F'/F)$)

$$\begin{aligned} a(\sigma) &= \delta'\sigma(\delta')^{-1} = gk\theta^*n_\sigma\sigma(\theta^*)^{-1}\sigma(k)^{-1}\sigma(g)^{-1} \\ &= z^*(\sigma) \cdot gkg^{-1} \cdot \sigma(gkg^{-1})^{-1} \in T_\xi(F')_x. \end{aligned}$$

Weil (nach 3.39) $H^1(F'/F, T_\xi(F')_c) = 1$, gibt es $t \in T_\xi(F')_x$, so daß $t\delta' \in \tilde{T}_\xi(F)_x$. Das Element $t\delta'$ ist stark kompakt, weil es x fixiert oder weil eine geeignete Potenz in $T(F)_c$ liegt.

Indem man mit geeigneten Elementen $s \in T_\xi(F)_x$ (oder aus $T_\xi^{\theta^{*\circ}}(F)$) multipliziert, kann man zudem noch erreichen, daß $st\delta' \in \tilde{T}_\xi(F)_x$ stark regulär (und stark kompakt) ist.

Zu (c): Das ist eine direkte Konsequenz von (a) und (b). Sei nämlich $\delta \in \tilde{T}_\xi(F)_x \cap L$ stark regulär und stark kompakt. Definiere $t^* \in T_\xi(\bar{F})$ durch $\delta = t^*\theta^*$. Sei $P_{\theta^*}(t^*)$ die Projektion von t^* auf $(T_\xi)_{\theta^*}$. Das Urbild γ von $P_{\theta^*}(t^*)$ unter der zulässigen Einbettung aus Teil (a) ist Norm-Image von δ . \square

Satz 5.45. *Der in 5.43 definierte Faktor $\Delta_{\text{III}}^x(\gamma, \delta)$ ist wohldefiniert: Er hängt (außer von x, G, H) nur ab von den Wahlen für $\gamma \leftrightarrow \delta$ (nämlich $\eta : T_H \rightarrow T_{\theta^*}$ und χ -Data für $\Phi(G, T)_{\theta^*}$) und nicht von den Wahlen: $\theta^*, \bar{T} \in [\tilde{T}_\xi], \bar{\delta} \in \tilde{\bar{T}}(F)_x$. (Alle anderen Größen werden durch diese festgelegt; auch die normierten χ -Data für $\Phi(G, \bar{T})_{\theta^*}$).*

Beweis: Der Beweis setzt sich aus folgenden vier Aussagen zusammen. Sie sind präziser aber auch technischer als die Aussage des Satzes. Zur Bezeichnung im Folgenden sei gesagt: Wann immer das Referenzmatching mit den Daten $(\bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{\eta}, \bar{T})$ angegeben ist, besitzen diese Daten die Normierungseigenschaften aus Definition 5.43. Das Matching $(\gamma, \delta, \eta, T)$ wird abgekürzt notiert, wenn es sich bei einer Manipulation überhaupt nicht verändert.

- (1) Δ_{III} ändert sich nicht, wenn es statt zu $(\theta^*; \gamma, \delta, \eta, \{\chi_\alpha\}; \bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{T}, \bar{\eta}, \{\chi_{\bar{\alpha}}\})$ berechnet wird zu

$$(hz\theta^*h^{-1}; \gamma, \delta, \text{inth} \circ \eta, \{\chi_{\alpha \circ \text{int } h^{-1}}\}; \bar{\gamma}, \bar{\delta}, h\bar{T}h^{-1}, \text{inth} \circ \bar{\eta}, \{\chi_{\bar{\alpha} \circ \text{int } h^{-1}}\}),$$

wobei $z \in \text{Cent}(G)$ und $h \in G_{sc}(F')_x$, so daß $\text{inth} \in G_{ad}(F)$.

- (2) Δ_{III} ändert sich nicht beim Übergang von

$$(\theta^*; \gamma, \delta; \bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{T}, \bar{\eta}, \{\chi_{\bar{\alpha}}\}) \quad \text{zu} \quad (\theta^*; \gamma, \delta; \bar{\gamma}, \bar{\delta}', \bar{T}, \bar{\eta}, \{\chi_{\bar{\alpha}}\}),$$

wobei $\bar{\delta} \in \tilde{\bar{T}}(F)$ und $\bar{\delta}' \in L(F)_x$ ein $G(F)$ -konjugiertes Element zu $\bar{\delta}$ ist.

- (3) Δ_{III} ändert sich nicht beim Übergang von

$$(\theta^*; \gamma, \delta; \bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{T}, \bar{\eta}, \{\chi_{\bar{\alpha}}\}) \quad \text{zu} \quad (\theta^*; \gamma, \delta; \bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{T}', \bar{\eta}', \{\chi_{\bar{\alpha}}\}),$$

wobei das modifizierte Referenzmatching lediglich über eine andere zulässige Einbettung $\eta' : \bar{T}_H \rightarrow \bar{T}'_{\theta^*}$ geführt wird. Ansonsten seien beide Referenzmatchings von der in 5.43 geforderten Form.

- (4) Δ_{III} ändert sich nicht beim Übergang von

$$(\theta^*; \gamma, \delta; \bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{T}, \bar{\eta}, \{\chi_{\bar{\alpha}}\}) \quad \text{zu} \quad (\theta^*; \gamma, \delta; \bar{\gamma}', \bar{\delta}', \bar{T}, \bar{\eta}, \{\chi_{\bar{\alpha}}\}),$$

wobei $\bar{\gamma}' \leftrightarrow \bar{\delta}'$ ein Matching ist, das über $\bar{\eta}$ geführt werden kann und die Eigenschaften der Normierung aus Definition 5.43 hat.

Die Aussage (1) wurde in (5.37) bewiesen.

Bei allen vier Modifikationen kann der Anteil $A(w) \in \hat{U}$ in der Kottwitz–Shelstad-Paarung zu Δ_{III} für beide Doppelmatchings benutzt werden. Daher wird unten nur die Auswirkung der Modifikationen auf $V(\sigma)$ analysiert. Es ist zu zeigen, daß $\langle V(\sigma)V'(\sigma)^{-1}, A(w) \rangle_{KS} = 1$, wobei $V(\sigma)$ für das erste (linke) Doppelmatching berechnet wird und $V'(\sigma)$ für das modifizierte (rechte Doppelmatching).

Zu (2): Sei $h \in G(F)$, so daß $\bar{\delta}' = h\bar{\delta}h^{-1}$. Die restlichen Bezeichnungen für die Matchings seien

$$\begin{array}{ccccccc} & & \bar{t}^* & \longleftrightarrow & \bar{t}^*\theta^* & = & \bar{\delta} \\ & \swarrow & & & & & \\ \eta(\gamma) \in & \bar{T}_{\theta^*} & \longleftarrow & \bar{T} & \longleftarrow & \tilde{T} & \xleftarrow{\text{int}\bar{g}'} \tilde{T}'_G =: \text{Cent}(G^{\bar{\delta}}, \tilde{G}) \\ & \searrow & & & & & \\ & & \bar{t}'^* & \longleftrightarrow & \bar{t}'^*\theta^* & \longleftarrow & \bar{\delta}' \end{array}$$

Dann existiert ein $t_1 \in \bar{T}(\bar{F})$, so daß $\bar{t}^*\bar{t}^{*-1} = (1 - \theta^*)t_1$, d.h. $t_1\bar{\delta}t_1^{-1} = t_1\bar{t}^*\theta^*t_1^{-1} = \bar{t}'^*\theta^* = \bar{g}'\bar{\delta}'(\bar{g}')^{-1} = \bar{g}'h\bar{\delta}(\bar{g}'h)^{-1}$. Daher ist $t_2 := t_1^{-1}\bar{g}'h \in \bar{T}^{\theta^*}(\bar{F})$. Sei $t := t_1t_2 \in \bar{T}$. Dann ist

$$\begin{aligned} V(\sigma)V'(\sigma)^{-1} &= \left((v(\sigma)^{-1}, 1), (t^*, \bar{t}^{*-1}) \right) \cdot \left((v(\sigma)^{-1}, \bar{g}'\sigma(\bar{g}')^{-1}), (t^*, \bar{t}'^{*-1}) \right)^{-1} \\ &= \left((1, \sigma(\bar{g}')\bar{g}'^{-1}), (1, \bar{t}'^*\bar{t}^{*-1}) \right) = \left((1, t^{-1}\sigma(t)), (1, (1 - \theta^*)t) \right) \end{aligned}$$

ein 1-Korand in $Z^1(F, U \xrightarrow{1-\theta^*} S)$.

Zu (3): Nach (5.14) gibt es ein $h \in G_{sc}^{\theta^*}$, so daß $\eta' = \text{inh}\eta$. Weil $\bar{\delta}$ stark regulär mod p ist, hat man die Schlüsse in (5.14) auch für die reduzierte Gruppe $\mathcal{G} \times_{\mathcal{O}_F} \kappa(F') = \bar{G}$ und die reduzierte Gruppe $\tilde{G} = \bar{G} \rtimes \langle \theta^* \rangle$. ($\theta^* \in \tilde{G}(F')_x!$) Daher darf man $h \in G_{sc}^{\theta^*}(F')_x$ annehmen.

Durch $\bar{t}^*\theta^* = \bar{g}\bar{\delta}\bar{g}^{-1} \in \tilde{T}$ und $\bar{t}'^*\theta^* = \bar{g}'\bar{\delta}'\bar{g}'^{-1} \in \tilde{T}'$ werden alle Bezeichnungen für $V(\sigma)$ und $V'(\sigma)$ bereitgestellt. Da $P_{\theta^*}(h^{-1}\bar{t}'^*h) = \eta(\gamma) = P_{\theta^*}(\bar{t}^*)$, existiert ein $t \in \bar{T}(\bar{F})$ mit

$$h^{-1}\bar{t}'^*h\theta^* = h^{-1}\bar{t}^*\theta^*h = t\bar{t}^*\theta^*t^{-1} = t\bar{g}\bar{\delta}(t\bar{g})^{-1}.$$

Identifiziere durch $\text{inh}h^{-1} : \tilde{T}' \rightarrow \tilde{T}$ die beiden Tori (über F). Dann gilt

$$\begin{aligned} V'(\sigma) &= \left((v(\sigma)^{-1}, (\text{inh}h^{-1})[ht\bar{g}\sigma(ht\bar{g})^{-1}]), (t^*, \bar{t}^{*-1} \cdot (1 - \theta^*)t^{-1}) \right) \\ &= V(\sigma) \cdot \left((1, \sigma(h)^{-1}h), (1, 1) \right) \cdot \left((1, t\sigma(t)^{-1}), (1, (1 - \theta^*)t^{-1}) \right). \end{aligned}$$

In der letzten Zeile stehen außer $V(\sigma)$ nur Koränder, denn $\sigma(h)^{-1}h$ liegt in $H^1(F'/F, \bar{T}(F')_x) = 1$ (wegen (3.39)). Daher sind $V(\sigma)$ und $V'(\sigma)$ kohomolog.

Zu (4): Nach Modifikation mit (2) darf man annehmen, daß $\bar{\delta}, \bar{\delta}' \in \tilde{T}(F)_x$. Also ist $\bar{\delta}'\bar{\delta}^{-1} =: t \in \bar{T}(F)_x$. Man hat

$$V'(\sigma) = V(\sigma) \cdot j((1, t))$$

und mit der Kompatibilität (vii) aus (5.32) gilt

$$\begin{aligned} \langle V(\sigma)V'(\sigma)^{-1}, A(w) \rangle_{KS} &= \left\langle j(1, t)^{-1}, A(w) \right\rangle_{KS} \\ &= \left\langle (a_T(w), x_{sc}(w))^{-1}, (1, t) \right\rangle_L \stackrel{(5.36)}{=} \langle a_{\bar{T}}(w), t \rangle_L^{-1} \stackrel{(ix)}{} \end{aligned}$$

In Korollar 6.13 wird gezeigt werden, daß $a_{\overline{T}}(w)$ unverzweigt ist, weil die χ -Data für $\Phi(\overline{T}, G)_{\theta^*}$ unverzweigt sind. Da t stark kompakt ist, folgt mit (3.37) $\langle a_{\overline{T}}(w), t \rangle_L = 1$.

Zum allgemeinen Beweis sei nur gesagt, daß man (falls nötig) mit Modifikation (1) beginnen sollte und ab dann den gesternten Automorphismus $hz\theta^*h^{-1} =: \theta'$ beibehält. Das so modifizierte Doppelmatching sei $(\theta'; \gamma, \delta; \bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{T}', \bar{\eta}', \{\chi_{\bar{\alpha}}\})$. Hierin gilt für das (hintere) Referenzmatching $\bar{T}' \in [T_{\xi, \theta'}]$, denn diese $G(F)$ -Konjugationsklasse wird (nach 5.42) charakterisiert durch die einzige Kohomologieklass mit Vertreter $n'(\sigma) \in Z^1(F'/F, N'(F')_x)$, wobei $N' = \text{Norm}(\mathbb{T}^{\theta'}, G)$ für einen (irgendwie fixierten) maximalen F -split Torus, der θ' -invariant ist und für den gilt $\mathbb{T}'(F')_c \subset G(F')_x$. Dieser Kozykel ist $n'(\sigma) = hn(\sigma)h^{-1}$, wenn $n(\sigma) \in N(\mathbb{T}^{\Theta^*}(F'))_x$ die Konjugationsklasse $[T_{\xi, \theta^*}]$ charakterisiert.

Allerdings muß (nach der Modifikation (1)) $\bar{\delta}$ nicht die Normierungsbedingungen 5.43 bezüglich θ' erfüllen. Weil $h\sigma(h)^{-1} \in \text{Cent}(G_{\text{der}})(F') \subset \bar{T}'(F')_x$, existiert ein $t \in \bar{T}'(F')_x$, so daß $th \in G(F)$. Dann ist $th\bar{\delta}(th)^{-1} \in \bar{T}'(F)$, erfüllt die Normierung 5.43 und ist $G(F)$ -konjugiert zu $\bar{\delta}$. Daher kann man jetzt Modifikation (2) benutzen, um das hintere Referenzmatching wieder zu normieren.

Danach kann man mit den Modifikationen (2) bis (4) jedes andere Referenzmatching mit θ' erreichen. \square

(5.46) Anmerkungen: Nach dem Satz wird die Abhängigkeit des normierten Faktors Δ_{III}^x von irgendwelchen Wahlen beschrieben durch (5.37.1+2+4).

Mit einigem Bezeichnungsaufwand zeigt man leicht, daß für zwei beliebige Matchings $\gamma_i \leftrightarrow \delta_i$ ($i \in \{1, 2\}$) gilt:

$$\Delta_{\text{III}}(\gamma_1, \delta_1; \gamma_2, \delta_2) = \frac{\Delta_{\text{III}}^x(\gamma_1, \delta_1)}{\Delta_{\text{III}}^x(\gamma_2, \delta_2)}.$$

Definition und Eigenschaften von Δ im quasisplit-Fall

(5.47) Bis hierher sei die Situation (5.21) fixiert (und G unverzweigt) Man definiert

$$\Delta(\gamma, \delta) := \Delta^{x, z_H^*}(\gamma, \delta) = \Delta_{\text{I}}^x(\gamma, \delta) \cdot \Delta_{\text{II}}(\gamma, \delta) \cdot \Delta_{\text{III}}^x(\gamma, \delta) \cdot \Delta_{\text{IV}}(\gamma, \delta).$$

Wenn zwischen γ und δ kein Matching besteht oder $\partial\gamma \neq z_H^*$, setzt man $\Delta(\gamma, \delta) = 0$.

Satz 5.48 ([KS99]). Für zwei Matchings $\gamma \leftrightarrow \delta \in L(F)$ und $\bar{\gamma} \leftrightarrow \bar{\delta} \in L(F)$ stark regulärer Elemente mit $\gamma^{-1}\sigma(\gamma) = z_H^*(\sigma) = \bar{\gamma}^{-1}\sigma(\bar{\gamma})$ ist

$$\Delta(\gamma, \delta; \bar{\gamma}, \bar{\delta}) := \frac{\Delta_{\text{I}}(\gamma, \delta)}{\Delta_{\text{I}}(\bar{\gamma}, \bar{\delta})} \cdot \frac{\Delta_{\text{II}}(\gamma, \delta)}{\Delta_{\text{II}}(\bar{\gamma}, \bar{\delta})} \cdot \Delta_{\text{III}}(\gamma, \delta; \bar{\gamma}, \bar{\delta}) \cdot \frac{\Delta_{\text{IV}}(\gamma, \delta)}{\Delta_{\text{IV}}(\bar{\gamma}, \bar{\delta})} = \frac{\Delta(\gamma, \delta)}{\Delta(\bar{\gamma}, \bar{\delta})}$$

kanonisch.

Beweis: Das ist [KS99, Theorem 4.6.A] und ergibt sich auch aus den Angaben, die bei den Definitionen der einzelnen Faktoren oben aus jener Arbeit zitiert wurden.

Allerdings haben [KS99] einen Transferfaktor $\Delta(\gamma, t, \theta)$ während hier t und θ zu $\delta = t\theta$ zusammengefaßt wurden. Um zu zeigen daß Δ unabhängig ist von der Zerlegung $\delta = t \cdot \theta$, reicht es darauf hinzuweisen, daß die Größen θ^* , $\eta : T_H \rightarrow T_{\theta^*}$, t^* und g aus Definition 5.9 zur Berechnung von Δ vollständig ausreichen. Sie hängen von γ und δ ab, wie oben geschildert, aber nicht von einer Zerlegung $\delta = t\theta$. \square

Satz 5.49. *Wenn G unverzweigt ist und x ein hyperspezieller Punkt im Gebäude $\mathcal{B}(G, F)$, dann ist der durch (5.27) und (5.43) normierte Faktor $\Delta^x = \Delta_I^x \cdot \Delta_{II} \cdot \Delta_{III}^x \cdot \Delta_{IV}$ kanonisch, d.h. unabhängig von allen Wahlen in (5.21).*

Beweis: Δ_{IV} ist nach Konstruktion unabhängig und die Abhängigkeiten der anderen Faktoren heben sich gegenseitig auf: Das folgt aus (5.26) und (5.37) bzw. (5.46). \square

Satz 5.50 (Eigenschaften von $\Delta(\cdot, \cdot)$).

(a) *Sei $H(F) \ni \gamma \leftrightarrow \delta \in L(F)$ ein Matching, γ' stabil konjugiert zu γ und $\delta' = h\delta h^{-1}$ mit $h \in G(F)$. Dann gilt*

$$\Delta(\gamma', \delta') = \omega(h)^{-1} \cdot \Delta(\gamma, \delta),$$

wobei ω der zu $\mathbf{a} \in H^1(W_F, \text{Cent}(\hat{G}))$ gehörende Charakter auf $G(F)$ ist. Daher ist für $f \in \mathcal{C}_c^\infty(L(F))$

$$\Delta(\gamma, \delta') \cdot O_{\delta'}^{L, \omega}(f) = \Delta(\gamma, \delta) \cdot O_\delta^{L, \omega}(f),$$

wobei $O_\delta^{L, \omega}(f) = \int_{\text{Cent}(\delta, G)(F) \backslash G(F)} \omega(g) f(g^{-1}\delta g) \frac{dg}{dt}$ mit geeignet gewählten Maßen.

(b) *Sei z_H das Bild von $z \in \text{Cent}(G)(F)$ unter $\text{Cent}(G)(F) \rightarrow \text{Cent}(H)(F)$ aus (5.6). Dann gilt*

$$\Delta(z_H \gamma, z\delta) = \langle a_T(w), z \rangle_L \cdot \Delta(\gamma, \delta).$$

Beweis: (a) ist [KS99, Theorem 5.1.D] und (b) ist ein Korollar von Lemma 5.38, denn alle Faktoren außer Δ_{III} werden (eigentlich) in der adjungierten Gruppe gebildet. \square

Unverzweigte endoskopische Daten

(5.51) In diesem Paragraphen werden alle fundamentalen Annahmen angenommen außer (5.17.5+6). Insbesondere zerfällt G über der unverzweigten Erweiterung F'/F und $\mathbf{a} \in H^1(\text{Gal}(F'/F), \text{Cent}(\hat{G}))$.

(5.52) **Assoziierte L -Aktion:** Gegeben sei eine reduktive F -Gruppe Q und $P = \hat{Q} \rtimes W_F$ das semidirekte Produkt der dualen Gruppe \hat{Q} mit der Weilgruppe W_F . Es wird nicht gefordert, daß P eine L -Gruppe ist, d.h. die W_F -Aktion auf \hat{Q} stabilisiert nicht notwendig irgendein Splitting von \hat{Q} , das stabil ist unter $W_F \rightarrow \text{Gal}(\bar{F}/F) \xrightarrow{\rho_Q} \text{Aut}(\hat{Q})$. (Das ρ_Q ist aus (1.10).)

In [LS87, (1.2)] wird nach Wahl eines $\rho_G(\text{Gal}(\bar{F}/F))$ -stabilen Splitting $\mathbf{spl}_{\hat{Q}}$ (d.h. eines F -Splittings) dem semidirekten Produkt P folgende L -Aktion zugeordnet:

Man multipliziert die W_F -Aktion, die vom semidirekten Produkt herkommt, mit einem geeigneten Kozykel aus $Z^1(W_F, \text{Inn}(\hat{Q}))$, so daß das Produkt $\mathbf{spl}_{\hat{Q}}$ stabil läßt.

Diese assoziierte L -Aktion nennen Langlands und Shelstad ρ_P . Sie ist durch $\mathbf{spl}_{\hat{Q}}$ eindeutig bestimmt. Für eine L -Gruppe ${}^L G$ hat man $\rho_{{}^L G} = \rho_G$, wobei das ρ_G aus (1.10) ist.

Lemma 5.53. *Gegeben sei ein endoskopisches Datum (H, \mathcal{H}, s, ξ) für (G, θ, \mathbf{a}) , für das H unverzweigt ist und die Annahmen (5.17.1-4+6+7) gelten. Dann existiert eine L -Einbettung $\xi_0 : {}^L H \hookrightarrow {}^L G$, so daß*

$$\begin{array}{ccc} {}^L H & \xrightarrow{\xi_0} & {}^L G \\ \downarrow \text{id} \times \varphi & & \downarrow \text{id} \times \varphi \\ \hat{H} \rtimes \Gamma & \hookrightarrow & \hat{G} \rtimes \Gamma \end{array}$$

kommutiert. Dabei ist Γ die Galoisgruppe einer geeigneten endlichen unverzweigten Erweiterung F'/F und $\varphi : W_F \rightarrow \Gamma$ die kanonische Projektion.

Beweis: Sei F' (zunächst) ein Zerfällungskörper von H , endlich und unverzweigt über F , und σ ein Erzeuger von $\text{Gal}(F'/F)$. Alle Bezeichnungen und Konventionen aus (5.5) werden benutzt.

Nach der Definition der endoskopischen Gruppe (5.3.2) ist die assoziierte L -Aktion von \mathcal{H} bzgl. $\mathbf{spl}_{\hat{H}}$ gleich der L -Aktion von ${}^L H$, d.h. $\rho_{\mathcal{H}}(\sigma) = \rho_H(\sigma)$. Das heißt, es existiert ein $h \in \mathcal{H}$, dessen Galoisanteil auf σ projiziert wird, mit $\text{int}h = \rho_H(\sigma)$ auf \hat{H} . (Insbesondere stabilisiert $\text{int}h$ das Splitting $\mathbf{spl}_{\hat{H}}$.) Weil ξ ein L -Homomorphismus ist, ist $\text{int}\xi(h) = \omega(\sigma) \circ \rho_G(\sigma)$, wobei $\omega(\sigma)$ ein innerer Automorphismus von \hat{G} ist. Man sucht nun nach einem Vertreter für $\omega(\sigma) \circ \rho_G(\sigma)|_{\hat{H}}$ in $\hat{G} \rtimes \varphi^{-1}(\sigma)$, der endliche Ordnung hat.

Da sowohl $\text{int}\xi(h)$ als auch $\rho_G(\sigma)$ die Tori \mathcal{T} und $\mathcal{T}^{\hat{\theta}_0}$ stabilisieren, hat man dasselbe für $\omega(\sigma)$. Also ist $\omega(\sigma)|_{\mathcal{T}} \in W(\hat{G}, \mathcal{T})^{\hat{\theta}} = W(\hat{G}^{\hat{\theta}_0}, \mathcal{T}^{\hat{\theta}_0})$. Vgl. (3.7) und 3.5. Danach existieren $t \in \mathcal{T}$ und $n \in \text{Norm}(\hat{G}^{\hat{\theta}_0}, \mathcal{T}^{\hat{\theta}_0})$, so daß $\omega(\sigma) \circ \rho_G(\sigma) = \text{int}tn \rtimes \sigma$. Indem man z.B. für n den Steinbergrepräsentanten $n(\omega(\sigma))$ aus Lemma 2.7 nimmt, kann man erreichen, daß $n \rtimes \sigma$ von endlicher Ordnung ist (nämlich $(n \rtimes \sigma)^{2[F':F]} = 1$ nach [LS87, Lemma 2.1.A.+B.]). Nun soll gezeigt werden, daß man $tn \rtimes \sigma$ durch Elemente aus \mathcal{T} so abändern kann, daß seine Ordnung endlich wird und es dabei (nach wie vor) auf \hat{H} wie h operiert.

Sei dazu $S := \text{Cent}(\hat{H}, \hat{G}) \cap \mathcal{T}$ und $\omega := \omega(\sigma)\rho_G(\sigma)$. Da $\rho_H(\sigma)$ von endlicher Ordnung ist, existiert ein $l \in \mathbb{N}$ mit

$$(xii) \quad \tilde{t} := (tn \rtimes \sigma)^l = t \cdot \underbrace{t^\omega \cdots t^{\omega^{l-1}}}_{=1} \cdot (n \rtimes \sigma)^l \in S^\omega.$$

Indem man l durch ein geeignetes Vielfaches ersetzt, kann man annehmen, daß $\tilde{t} \in (S^\omega)^\circ$. Da S^{ω° ein komplexer Torus ist, existiert ein $z \in S^{\omega^\circ}$ mit $z^l = \tilde{t}^{-1}$. Dann zeigt die Rechnung (xii) oben, daß $(ztn \rtimes \sigma)^l = 1$, $zt \in \mathcal{T}$ und $\text{int}(ztn \rtimes \sigma)|_{\hat{H}} = \text{int}(tn \rtimes \sigma)|_{\hat{H}} = \omega|_{\hat{H}} = \text{int}\xi(h)|_{\hat{H}}$. (Insbesondere stabilisiert $ztn \rtimes \sigma$ das Splitting $\text{spl}_{\hat{H}}$.)

Sei $m := \text{ord}(ztn \rtimes \sigma) < \infty$, F'' die unverzweigte Erweiterung von F vom Grade m und $\sigma' \in \text{Gal}(F''/F)$ über $\sigma \in \text{Gal}(F'/F)$. Nun definiere $\xi_0 : \hat{H} \rtimes \text{Gal}(F''/F) \rightarrow \hat{G} \rtimes \text{Gal}(F''/F)$ durch $\xi_0(\sigma') = ztn \rtimes \sigma$. Unter Benutzung der Projektion $W_F \rightarrow \text{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow \text{Gal}(F''/F)$ (und der Inklusion $\hat{H} \subset \hat{G}$) ist ξ_0 vollständig definiert. \square

Korollar 5.54. *Sei \mathcal{Z} die Untergruppe aller $h \in \mathcal{H}$, für die $\text{int}(h)$ das Splitting $\text{spl}_{\hat{H}}$ stabilisiert (vgl. [KS99, (2.2)]). Falls die endoskopische Gruppe H unverzweigt ist, ist*

$$1 \longrightarrow \text{Cent}(\hat{H}) \longrightarrow \mathcal{Z} \longrightarrow W_F \longrightarrow 1$$

splitexakt.

Beweis: In [KS99, (2.2)] wurde gezeigt, daß die Sequenz exakt ist (in der Kategorie der topologischen Gruppen). Dasselbe Argumentation wie im Beweis zu 5.53 liefert einen homomorphen Schnitt $c : W_F \rightarrow \mathcal{Z}$.

Mit Definition (5.3.2) verschafft man sich ein $h \in \mathcal{H}$, so daß $\text{int}\xi(h) = \rho(\sigma)$ für einen Erzeuger von $\text{Gal}(F'/F)$ wie im Beweis von 5.53. Man beobachtet die Zerlegung $h = tn \rtimes \sigma$, wenn man \mathcal{H} via ξ als Untergruppe von ${}^L G$ auffaßt und berechnet als Verschärfung des Beweises von 5.53, daß für \tilde{t} dort sogar gilt $\tilde{t} = \xi(h)^l \in S^\omega \cap \mathcal{H} = S^{\langle \omega, \hat{\theta} \rangle}$. Nach eventueller Vervielfachung von l wählt man die Korrektur $z \in (S^{\langle \omega, \hat{\theta} \rangle})^\circ$, so daß $ztn \rtimes \sigma \in \xi(\mathcal{H})$ endliche Ordnung m hat und auf \hat{H} operiert wie h , d.h. wie die L -Aktion $\rho_H(\sigma)$. Insbesondere ist $ztn \rtimes \sigma \in \mathcal{Z}$ (bzw. $\xi(\mathcal{Z})$)!

Nach eventueller (unverzweigter) Erweiterung von F' kann man annehmen, daß $m \mid [F' : F]$. Dann ist der Schnitt $c : W_F \xrightarrow{\text{Proj.}} \langle \sigma \rangle \rightarrow \mathcal{Z}$ definiert durch die Vorgabe, daß σ abgebildet wird auf das Urbild von $ztn \rtimes \sigma$ unter ξ . \square

Korollar 5.55. *Wenn (H, \mathcal{H}, s, ξ) endoskopisches Datum für (G, θ, \mathbf{a}) ist mit unverzweigtem H , dann existiert immer ein Isomorphismus ι , der auf den W_F -Komponenten von ${}^L H$ und \mathcal{H} die Identität bewirkt, so daß das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} {}^L H & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{H} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \hat{H} & \xlongequal{\quad} & \hat{H} \end{array}$$

Beweis: Das ist äquivalent zum vorangegangenen Korollar. \square

Also darf man, wenn die fundamentalen Annahmen 5.17(1)-(4) in Kraft sind und H unverzweigt ist, immer annehmen, daß \mathcal{H} bereits eine L -Gruppe ist und der L -Homomorphismus $\xi : \mathcal{H} = {}^L H \rightarrow {}^L G$ über die endliche unverzweigte Galoisversion

der L -Gruppen $\xi_0 : \hat{H} \rtimes \langle \sigma \rangle \rightarrow \hat{G} \rtimes \langle \sigma \rangle$ faktorisiert.

Das war bei der Begründung der fundamentalen Annahmen in (5.18) noch offen geblieben.

6 Homogenität

(6.1) Fest vorgegeben sei weiterhin ein Tripel (G, θ, \mathbf{a}) und ein endoskopisches Datum (H, \mathcal{H}, s, ξ) , und die fundamentalen Annahmen von (5.17) gelten weiterhin. Sei $\gamma \in H(F)$ stark regulär, stark kompakt und Norm-Image von $\delta \in \tilde{G}(F) \cap L$. Die Bezeichnungen für das Matching $\gamma \leftrightarrow \delta$ werden aus (5.9) übernommen, insbesondere alles, was in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} T_H & \xrightarrow{\eta} & T_{\theta^*} & \xleftarrow{P_{\theta^*}} & T & \xleftarrow{x \mapsto x\theta^{*-1}} & \tilde{T} \cap L \xleftarrow{\text{int } g} \tilde{T}_G \cap L \\ \gamma & \longmapsto & P_{\theta^*}(t^*) & \longleftarrow & t^* & \longleftarrow & \delta^* \longleftarrow \delta \end{array}$$

benannt wird. Sei E ein galoisscher Zerfällungskörper von T , endlich über F' , so daß $t^* \in T(E)$ und $g \in G(E)$. Immer ist $l := |\pi_0(\tilde{G})|$.

Zur Berechnung des (normierten) Transferfaktors Δ^x seien ein $\theta^* \in L(F')$ wie in (5.17)(3) und ein hyperspezieller Punkt $x \in \mathcal{B}(G, F)^{\theta^*}$ fixiert.

Behauptung 6.2. *Wenn γ stark kompakt ist, sind auch δ und δ^* stark kompakt.*

Beweis: Weil $T_H(F) \xrightarrow{\sim} T_{\theta^*}(F)$ in der Kategorie \mathbf{tJZ}_p verläuft, ist $P_{\theta^*}(t^*)$ stark kompakt. Die Einschränkung von P_{θ^*} auf T^{θ^*} hat aus Dimensionsgründen endlichen Kern. Weil $\delta^{*l} = t^* \cdot \theta^*(t^*) \cdots \theta^{*l-1}(t^*) \in T^{\theta^*}$ und unter $P_{\theta^*}|_{T^{\theta^*}}$ auf das stark kompakte $P_{\theta^*}(t^*)^Q$ abgebildet wird, ist δ^{*l} stark kompakt. Mit $\delta^{*l\mathbb{Z}}$ ist aber auch $\delta^{*\mathbb{Z}}$ beschränkt, d.h. δ^* ist stark kompakt (vgl. (3.28)). Schließlich ist δ stark kompakt, weil $\text{int } g : \tilde{T}(E) \rightarrow \tilde{T}_G(E)$ in \mathbf{tJZ}_p ist. \square

(6.3) Q -Potenzen von Matchings: Nach (3.31) gibt es ein zu p teilerfremdes $N \in \mathbb{N}$, so daß $x^N = 1$ für alle residuell halbeinfachen $x \in \tilde{G}(E)$. Sei Q eine p -Potenz mit $Q \equiv 1 \pmod{N}$.

Die Idee dabei ist, Q möglichst groß zu machen, um bei stark kompakten δ den topologisch unipotenten Teil von δ^Q möglichst nahe an die Eins zu bringen. Hier wird gezeigt, daß das Matching bei diesem Potenzierungsprozess nicht verändert werden muß.

Weil $P_{\theta^*}(t^*) = P_{\theta^*}(t^{*\theta^*})$ und $\theta^{*l} = 1$, hat man

$$P_{\theta^*}(t^{*Q}) = P_{\theta^*}(t^* \cdot t^{*\theta^*} \cdots t^{*\theta^{*Q-1}}) = P_{\theta^*}((t^*\theta^*)^Q \theta^{*-1}) = P_{\theta^*}(\delta^{*Q} \theta^{*-1}).$$

Daher hat man ein Matching $\gamma_u^Q \gamma_s = \gamma^Q \leftrightarrow \delta^Q = \delta_u^Q \delta_s$ und zwar mit denselben Größen g, T, θ^* wie bei $\gamma \leftrightarrow \delta$. Genauer hat man

$$\begin{array}{ccccccc} T_H & \xrightarrow{\eta} & T_{\theta^*} & \xleftarrow{P_{\theta^*}} & T & \xleftarrow{x \mapsto x\theta^{*-1}} & \tilde{T} \cap L \xleftarrow{\text{int } g} \tilde{T}_G \cap L \\ \gamma^Q & \longmapsto & P_{\theta^*}(t^{*Q}) & \longleftarrow & t^* \cdot t^{*\theta^*} \cdots t^{*\theta^{*Q-1}} & \longleftarrow & \delta^{*Q} \longleftarrow \delta^Q \end{array}$$

Nach Korollar 3.32 liegen δ_u^* und $\delta_s^* \theta^{*-1} =: s^*$ in der Einskomponente T (von \tilde{T}). Wegen der Funktorialität der topologischen Jordanzerlegung hat man $S_{I\alpha}(\delta_u^*) \in U_F^1$ und

$$S_{I\alpha}(s^{*l}) = S_{I\alpha}(s^* \cdot \theta^*(s^*) \cdots \theta^{*l-1}(s^*)) = S_{I\alpha}((s^* \theta^*)^l) = S_{I\alpha}(\delta_s^{*l})$$

ist residuell halbeinfach in E , d.h. es liegt im Teichmüllerschen Restsystem μ_E . Weil l und p teilerfremd sind, folgt aus Korollar 3.30.4 auch $S_{I\alpha}(s^*) \in \mu_E$.

Satz 6.4. *Sei $\gamma \leftrightarrow \delta$ das Matching stark regulärer, stark kompakter Elemente aus (6.1). Sei Q eine p -Potenz, so daß $Q \equiv 1 \pmod{N}$ (vgl. (6.3)). Wenn γ^Q, δ^Q stark regulär sind und die χ -Data zahm verzweigt gewählt werden (vgl. (3.43)), dann hat man*

$$\Delta^x(\gamma^Q, \delta^Q) = \Delta^x(\gamma, \delta) \cdot |Q|_F^{\frac{|M|}{2}} \cdot \prod_{\Gamma \cdot \beta \in M/\Gamma} \chi_\beta(Q),$$

wobei M die Menge aller $\beta \in \Phi_I = P_I(\Phi(G))$ ist, so daß die $\alpha \in \Phi$ mit $P_I(\alpha) = \beta$ einer der folgenden Bedingungen genügen:

- α ist vom Typ I, $S_{I\alpha}(\delta_s^* \theta^{*-1}) = 1$ und $P_I(\alpha) = \beta$ kommt nicht von H her. (Vgl. Definition 5.7.)
- α ist vom Typ II, $S_{I\alpha}(\delta_s^* \theta^{*-1}) \in \{\pm 1\}$ und weder $P_I(\alpha)$ noch $2P_I(\alpha)$ kommen von H her.
- α ist vom Typ III, $S_{I\alpha}(\delta_s^* \theta^{*-1}) = -1$ und $P_I(\alpha)$ kommt von H her.

M/Γ bezeichnet die Menge aller Γ -Orbiten in M .

Weil Quadrate in \mathbb{Q}_p^\times sicherlich Normen bei jeder quadratischen Erweiterung p -adischer Körper sind, sind alle χ -Data trivial auf $\mathbb{Q}_p^{\times 2}$. Daher hat man das

Korollar 6.5. *Sei $Q \in \mathbb{Q}_p^{\times 2}$ und sonst dieselben Bedingungen und Bezeichnungen wie in Satz 6.4. Dann gilt*

$$\Delta^x(\gamma^Q, \delta^Q) = \Delta^x(\gamma, \delta) \cdot |Q|_F^{\frac{|M|}{2}}.$$

Der Beweis von Satz 6.4 geht (fast) bis zum Ende dieses Kapitels. Dabei werden die Faktoren $\Delta_I, \dots, \Delta_{IV}$ getrennt analysiert. Für den Faktor Δ_I ist die Analyse trivial. Da er (via $\lambda_{\{a_\alpha\}}(T_{sc}^{\theta^*})$) nur vom Torus T abhängt, hat man sofort

$$\Delta_I(\gamma^Q, \delta^Q) = \Delta_I(\gamma, \delta).$$

Homogenität von Δ_{II} und Δ_{IV}

Lemma 6.6. *Sei e_F der Verzweigungsindex von F/\mathbb{Q}_p und $p > e_F + 1$. Sei $u \in U_F^1$ eine Einseinheit in F und Q eine p -Potenz. Dann ist*

$$\frac{u^Q - 1}{Q(u - 1)} \in U_F^1 := 1 + \mathfrak{p}.$$

Beweis: [Hal93, Lemma 3.1] oder [Hasse, §15.5.I] □

Behauptung 6.7. *Unter den Voraussetzungen von Satz 6.4 gilt*

$$\Delta_{\text{II}}(\gamma^Q, \delta^Q) = \Delta_{\text{II}}(\gamma, \delta) \cdot \prod_{\Gamma \cdot P_I(\alpha) \in M/\Gamma} \chi_{P_I(\alpha)}(Q).$$

Beweis: Sei $\chi = \chi_{P_I(\alpha)}$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ und $s^* = \delta_s^* \theta^{*-1}$ wie in (6.3). Weil die χ -Data zahlm verzweigt angenommen werden, gilt

$$\begin{aligned} \chi_{P_I(\alpha)}(S_{I\alpha}(t^*) - \varepsilon) &= \chi\left(\underbrace{S_{I\alpha}(s^*)}_{\in \mu_{\bar{F}}} \underbrace{S_{I\alpha}(\delta_u^*)}_{\in U_{\bar{F}}^1} - \varepsilon\right) \\ &= \begin{cases} \chi(\varepsilon \cdot (S_{I\alpha}(\delta_u^*) - 1)) & \text{falls } S_{I\alpha}(s^*) = \varepsilon \\ \chi(S_{I\alpha}(s^*) - \varepsilon) & \text{falls } S_{I\alpha}(s^*) \neq \varepsilon \end{cases} \end{aligned}$$

Wegen $s^* = \delta_s^* \theta^{*-1} = (\delta^{*Q})_s \cdot \theta^{*-1}$ und Lemma 6.6 hat man

$$\begin{aligned} \chi(S_{I\alpha}(\delta^{*Q} \theta^{*-1}) - \varepsilon) &= \begin{cases} \chi(\varepsilon \cdot (S_{I\alpha}(\delta_u^{*Q}) - 1)) & \text{falls } S_{I\alpha}(s^*) = \varepsilon \\ \chi(S_{I\alpha}(s^*) - \varepsilon) & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \chi(Q) \cdot \chi(\varepsilon \cdot (S_{I\alpha}(t^*) - 1)) & \text{falls } S_{I\alpha}(s^*) = \varepsilon \\ \chi(S_{I\alpha}(t^*) - \varepsilon) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Indem man damit alle Fälle in Zähler und Nenner von Δ_{II} durchgeht, erhält man die Behauptung. □

Behauptung 6.8.

$$\Delta_{\text{IV}}(\gamma^Q, \delta^Q) = \Delta_{\text{IV}}(\gamma, \delta) \cdot |Q|_{\bar{F}}^{\frac{|M|}{2}}$$

Beweis: Der Beweis ist der von Behauptung 6.7. Man muß nur alle (zahlm verzweigten) Charaktere $\chi_{P_I(\alpha)}$ ersetzen durch den unverzweigten Charakter $|\cdot|_{\bar{F}}^{1/2}$ und die Formel aus Behauptung 7.30 benutzen um Δ_{IV} in die Gestalt

$$\Delta_{\text{IV}}(\gamma, \delta) = \frac{D_{G/T_G}(\delta^*)}{D_{H/T_H}(\gamma)} = \prod_{P_I(\alpha) \in P_I(\Phi(G))} |\varepsilon(\alpha) \cdot S_{I\alpha}(t^*) - 1|_{\bar{F}}^{\frac{1}{2}} \cdot \prod_{\alpha \in \Phi(H)} |\alpha(\gamma) - 1|_{\bar{F}}^{-\frac{1}{2}}$$

zu bringen, in der die Analogie zu Δ_{II} offenbar wird. (Dabei ist $\varepsilon(\alpha) = -1$ für α vom Typ III und sonst $= 1$.) Allerdings wird hier nun nicht mehr über Γ -Orbiten von Wurzeln, sondern über die Wurzeln selbst multipliziert. Deswegen geht in die Formel oben $|M|$ statt $|M/\Gamma|$ ein. □

Homogenität von Δ_{III}

Satz 6.9. *Sei $x \in \mathcal{B}(G, F)^{\theta^*}$ hyperspeziell. Unter den Voraussetzungen von Satz 6.4 gilt*

$$\Delta_{\text{III}}^x(\gamma, \delta) = \Delta_{\text{III}}^x(\gamma_s, \delta_s) .$$

Beweis: Von dem nach 5.43 normierten Referenzmatchings $\bar{\gamma} \leftrightarrow \bar{\delta}$, werden nur $\bar{v}(\sigma)$ und \bar{t}^* (zur Bildung von $V(\sigma)$) benützt werden.

Für die beiden Matchings $\gamma_u^Q \gamma_s \leftrightarrow \delta_u^Q \delta_s$ und $\gamma \leftrightarrow \delta$ bleibt nach (6.3) der 1-Kozykel $v(\sigma) = g\sigma(g^{-1})$ aus (5.34) der gleiche. Also hat man im einen Fall $V(\sigma) = ((v^{-1}, \bar{v}), (t^*, \bar{t}^{*-1})) \in Z^1(F, U \rightarrow S)$ und im andern Fall $((v^{-1}, \bar{v}), (\delta^{*Q} \theta^{*-1}, \bar{t}^{*-1}))$ zu betrachten.

Sei $\delta^* = \delta_s^* \cdot \delta_u^*$ die topologische Jordanzerlegung (in $\tilde{T}(E)$). Nach Korollar 3.32 ist $\delta_u^* \in T$ und vertauscht mit $\delta_s^* \in \tilde{T} \cap L$, d.h. $\delta_u^* \in T^{\theta^*}(E)$.

Sei $m \in \mathbb{N}$. Aus dem Matching (aus (6.3)) $\gamma_u^Q \gamma_s \leftrightarrow \delta_u^Q \delta_s$ folgt (vgl. 5.34) die 1-Hyperkozykelrelation

$$(1 - \theta^*)v(\sigma) = \delta^{*Q^m} \sigma(\delta^{*Q^m})^{-1} = \underbrace{\delta_u^{*Q^m}}_{\delta_u^{*Q^m}} \underbrace{\delta_s^* \sigma(\delta_s^*)^{-1}}_{\sigma(\delta_s^*)^{-1}} \underbrace{\sigma(\delta_u^{*Q^m})^{-1}}_{\sigma(\delta_u^{*Q^m})^{-1}} = (\delta_s^*)^{1-\sigma} \cdot (\delta_u^{*Q^m})^{1-\sigma},$$

wobei alle unterklammerten Terme in T liegen. Indem man diese Gleichung für mehrere m vergleicht, folgt $(1 - \theta^*)v(\sigma) = (\delta_s^*)^{1-\sigma}$ und $\delta_u^{*\sigma} = \delta_u^*$. Daher ist $\delta_u^* \in T^{\theta^*}(F)$ und in $Z^1(F, U \rightarrow S)$ gilt

$$(i) \quad \left((v^{-1}, \bar{v}), (t^*, \bar{t}^*) \right) = \left((v^{-1}, \bar{v}), (\delta_s^* \theta^{*-1}, \bar{t}^*) \right) \cdot \left((1, 1), (\delta_u^*, 1) \right)$$

Der letzte Term rechts außen liegt in $j(H^0(F, S))$ in der Spektralsequenz (viii) in (5.32). Um die Aussage des Satzes zu zeigen, muß man also zeigen, daß in der Kottwitz–Shelstad–Paarung (vi) in (5.32) gilt

$$1 = \left\langle A(w), j(\delta_u^*, 1) \right\rangle_{KS} \stackrel{(5.32)}{=} \stackrel{(vii)}{\left\langle \left(a_T(w), x_{sc}(w) \right), \left(\delta_u^*, 1 \right) \right\rangle_L} \stackrel{(5.36)}{=} \stackrel{(x)}{\left\langle a_T(w), \delta_u^* \right\rangle_L},$$

wobei zuletzt die Kottwitz–Shelstad–Paarung zwischen den Hyperkohomologiegruppen $H^1(F, T_{sc} \rightarrow T)$ und $H^1(F, \hat{T} \rightarrow \hat{T}_{ad})$ gemeint ist. Daher ist man fertig, wenn Folgendes bewiesen ist:

Lemma 6.10. *Wenn die χ -Data alle zahm verzweigte Charaktere sind, ist $\langle a_T(w), \cdot \rangle_L$ ein zahm verzweigter Charakter von $T(F)$.*

Beweis:

1. Schritt: Es reicht, zu zeigen, daß das Quadrat des Charakters $\langle a_T(w), \cdot \rangle_L \in \text{Hom}_c(T(F), \mathbb{C}^\times)$ zahm verzweigt ist, denn nach Korollar 3.30.4 kann man aus jedem topologisch unipotenten Element (eindeutig) Wurzeln in $T(F)$ ziehen (weil $p > 2$): $\langle a_T(w), u \rangle_L = \langle a_T(w)^2, u^{\frac{1}{2}} \rangle_L$ (für u topologisch unipotent).

2. Schritt: Um $a_T(w)$ zu berechnen, werden folgende Bezeichnungen benützt: Es seien (für $w \mapsto \sigma$ unter $W_{E/F} \rightarrow \Gamma = \text{Gal}(E/F)$)

$$\begin{aligned} \xi_T(w) &= r_p(w) \cdot s_{q/p}(\sigma) \cdot n_G(\omega_T(\sigma)) \rtimes w \in {}^L G & r_p(w) &\in \mathcal{T} \\ \xi_{T_H}(w) &= \bar{r}_p(w) \cdot \bar{s}_{q/p}(\sigma) \cdot n_H(\omega_{T_H}(\sigma)) \rtimes w \in {}^L H & \bar{r}_p(w) &\in \mathcal{T}_H \\ \xi(w) &= m_\xi(\sigma) \rtimes w \in {}^L G \end{aligned}$$

wobei alle Bezeichnungen für ${}^L G$ aus (3.47) stammen: $\omega_T(\sigma)$ bezeichne den Weylgruppenanteil der durch die Identifikation $\hat{T} \simeq \mathcal{T}$ (aus (5.5)) von T auf \mathcal{T} übertragenen Galoisaktion von σ . Der Steinbergrepresentant $n_G(\dots)$ (bzgl. $\mathbf{spl}_{\hat{G}}$) ist in 2.7 definiert worden. In (v) in (3.47) wurde r_p definiert. Dabei ist p eine Eichung von Φ , wie sie Definition 3.44 vorkommt. Die Eichung q ist durch den Positivbereich Φ^+ (also durch \mathcal{B}) definiert. Die Übergangskokette $s_{q/p} \in X_*(\mathcal{T}) \otimes \{\pm 1\}$ wurde in 3.46 definiert.

Sinngemäß sind auch alle Bezeichnungen für die endoskopische Gruppe ${}^L H$ zu verstehen. Nur zur Unterscheidung tragen sie Balken.

Die Bezeichnungen für ξ stimmen mit (5.3.4) überein. Es ist bequem, ξ auf \hat{H} als Inklusion aufzufassen.

Nach der Definition von $a_T(w)$ in (5.35) rechnet man in ${}^L G$:

$$\begin{aligned} a_T(w)r_p(w)s_{q/p}(\sigma)n_G(\omega_T(\sigma)) \rtimes w &= a_T(w) \cdot \xi_T(1 \rtimes w) \stackrel{(5.35)}{=} (\xi \circ \xi_{T_H})(1 \rtimes w) \\ &= \xi(\bar{r}_p(w)\bar{s}_{q/p}(\sigma)n_H(\omega_{T_H}(\sigma)) \rtimes w) = \bar{r}_p(w)\bar{s}_{q/p}(\sigma)n_H(\omega_{T_H}(\sigma))m_\xi(\sigma) \rtimes w \end{aligned}$$

Also

$$(ii) \quad a_T(w) = \underbrace{\bar{r}_p(w)}_{\in \mathcal{T}} \underbrace{\bar{s}_{q/p}(\sigma)}_{\in \mathcal{T}} \underbrace{n_H(\omega_{T_H}(\sigma))m_\xi(\sigma)n_G(\omega_T(\sigma))^{-1}}_{=: \tilde{t}(\sigma) \in \mathcal{T}} \underbrace{s_{q/p}(\sigma)^{-1}}_{\in \mathcal{T}} \underbrace{r_p(w)^{-1}}_{\in \mathcal{T}}.$$

Direkt aus der Definition 3.46 folgt $s_{q/p}^2 = 1$ (und $\bar{s}_{q/p}^2 = 1$). Weil a_T , r_p^2 und \bar{r}_p^2 1-Kozykel aus $Z^1(W_{E/F}, \hat{T})$ sind, ist $\tilde{t}^2(\sigma) \in Z^1(\Gamma, \hat{T}) \subset Z^1(W_{E/F}, \hat{T})$.

3. Schritt: Offensichtlich ist $\tilde{t}^2(\sigma)$ ein unverzweigter 1-Kozykel (denn $\tilde{t}^2(x) = 1$ für $x \in E^\times \subset W_{E/F}$). Nach (3.37) ist somit sein Anteil am Charakter $\langle a_T(w), \cdot \rangle_L$ unverzweigt. Der restliche Teil korrespondiert nach (ii) zu $\bar{r}_p^2 \cdot r_p^{-2} \in H^1(W_{E/F}, \hat{T})$. Dies liefert nach (3.36) und dem folgenden Lemma einen zahm verzweigten Charakter, so daß man fertig ist.

Lemma 6.11. *Seien alle χ -Data $\{\chi_\lambda \mid \lambda \in \Phi := (\Phi(\hat{G})_{\hat{\theta}})^\vee\}$ zahm verzweigte Charaktere (von den entsprechenden $F_{+, \lambda}^\times$). Man wähle für jedes λ eine zahm verzweigte Erweiterung χ'_λ auf E^\times , so daß $\chi'_{-\lambda} = \chi'_\lambda{}^{-1}$. Sei $\phi_\lambda := \lambda \circ \chi'_\lambda \in \text{Hom}(E^\times, \hat{T}^{\hat{\theta}^\circ})$. Dann ist $\bar{r}_p(w)^2 \cdot r_p(w)^{-2}$ in $H^1(W_{E/F}, \hat{T}^{\hat{\theta}^\circ})$ kohomolog zu*

$$\text{Cor}_{E^\times}^{W_{E/F}} \left(\prod_{\substack{\lambda \text{ aus Vertretersystem} \\ \text{für die } \Gamma\text{-Orbiten} \\ \text{in } \Phi(H, T_H)}} \phi_\lambda \cdot \left(\prod_{\substack{\lambda \text{ aus Vertretersystem} \\ \text{für die } \Gamma\text{-Orbiten} \\ \text{in } \Phi^\vee(\hat{G}^{\hat{\theta}^\circ}, \mathcal{T}^{\hat{\theta}^\circ})}} \phi_\lambda \right)^{-1} \right),$$

wobei die Produkte über die Galoisorbiten von Wurzeln in $\Phi(H, T_H) = \Phi^\vee(\hat{H}) \xrightarrow{\xi} (\Phi(\hat{G})_{\hat{\theta}})^\vee$ bzw. $\Phi^\vee(\hat{G}^{\hat{\theta}^\circ}) \subset (\Phi(\hat{G})_{\hat{\theta}})^\vee = (\Phi^\vee(G, T)_{\theta^*})^\vee$ ausgeführt werden. Auf diesem (letzten) Wurzelsystem werde dabei die Galoisaktion durch die Identifikation $\hat{T} \simeq \mathcal{T}$ von T her induziert. (Das ist mit den Gleichheitszeichen gemeint!)

Beweis: Nach Definition (v) in (3.47) ist r_p ein Produkt über gewisse $r_{p,\alpha}$ für alle symmetrisierten Galoisorbits $R = \Gamma(-\alpha) \cup \Gamma\alpha$ in Φ . Ab jetzt sei ein α fixiert und die Bezeichnungen aus den Definitionen 3.42 und 3.44 werden für dieses α verwendet.

(Insbesondere werden das Vertretersystem R_+ für Γ/Γ_\pm , die Vertreter $\{w_\sigma \mid \sigma \in R_+\}$ für $W_{E/F}/W_{E/F_\pm}$ und der Spezialvertreter $v \in W_{E/F_+} - W_{E/F_\pm}$ im symmetrischen Fall $\Gamma_\pm \neq \Gamma_+$ vorkommen.)

Die Wahlen dieser Vertreter, des Fußpunkts $\alpha \in R$ und der Eichung p (die durch α und R_+ nach 3.44 bestimmt ist) verändern $r_{p,\alpha}$ nach Fakt 3.45 nur um Koränder aus $B^1(W_{E/F}, \hat{T}^{\hat{\theta}_0})$ ab. Ausgehend von den exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & E^\times & \longrightarrow & W_{E/F_+} & \longrightarrow & \Gamma_+ \longrightarrow 1 \\ 1 & \longrightarrow & W_{E/F_+} & \longrightarrow & W_{E/F} & \longrightarrow & \Gamma/\Gamma_+ \longrightarrow 1 \end{array}$$

rechnet man:

$$\left(\text{Cor}_{E^\times}^{W_{E/F}} \phi_\alpha \right) (w) = \left(\text{Cor}_{W_{E/F_+}}^{W_{E/F}} \circ \text{Cor}_{E^\times}^{W_{E/F_+}} (\alpha \circ \chi'_\alpha) \right) (w)$$

Weil Γ_+ die Stabilisatorgruppe von α ist, hat man

$$= \left(\text{Cor}_{W_{E/F_+}}^{W_{E/F}} \left(\alpha \circ \underbrace{\text{Cor}_{E^\times}^{W_{E/F_+}} (\chi'_\alpha)}_{=\chi_\alpha \circ r_{F_+}^{-1}} \right) \right) (w),$$

Die Umformung unter der Klammer gilt nach (3.34) und (3.35) für den eindimensionalen Splitorus.

$$= \prod_{\sigma \in \Gamma/\Gamma_+} \tau(\alpha) \otimes \left((\chi_\alpha \circ r_{F_+}^{-1}) \underbrace{(w_\tau^{-1} w w_\sigma)}_{\in W_{E/F_+}} \right) \in X_*(\hat{T}^{\hat{\theta}_0}) \otimes \mathbb{C}^\times = \hat{T}$$

wobei $\tau \in \Gamma/\Gamma_+$ von σ und w so abhängt, daß die Bedingung unter der Klammer erfüllt ist. Aus optischen Gründen läuft ab jetzt das Produkt über τ :

$$= \prod_{\tau \in \Gamma/\Gamma_+} \tau(\alpha) \otimes \left((\chi_\alpha \circ r_{F_+}^{-1}) \underbrace{(w_\tau^{-1} w w_\sigma)}_{\in W_{E/F_+}} \right)$$

Falls $\Gamma_\pm = \Gamma_+$ ist dies genau $r_{p,\alpha}$. Andernfalls hat man (Beachte, daß im Folgenden σ immer noch in Γ/Γ_+ liegt, so daß $w_\tau^{-1} w w_\sigma \in W_{E/F_+}$, aber $\tau \in R_+ \subset \Gamma!$).

$$= \prod_{\tau \in R_+} \tau(\alpha) \otimes \left((\chi_\alpha \circ r_{F_+}^{-1}) \underbrace{(w_\tau^{-1} w w_\sigma)}_{\in W_{E/F_+}} \right) \cdot \prod_{\tau \in R_+} \tau(v(\alpha)) \otimes \left((\chi_\alpha \circ r_{F_+}^{-1}) \underbrace{(v^{-1} w_\tau^{-1} w w_\sigma v)}_{\in W_{E/F_+}} \right)$$

Weil (nach 3.42(2)+(3)) $v(\alpha) = -\alpha$ und $\chi_\alpha(v^{-1}wv) = \chi_\alpha(w)^{-1}$ für $w \in W_{E/F_+}$, folgt

$$= \prod_{\tau \in R_+} \tau(\alpha) \otimes \left((\chi_\alpha \circ r_{F_+}^{-1}) \underbrace{(w_\tau^{-1} w w_\sigma)}_{\in W_{E/F_+}} \right)^2 = r_{p,\alpha}(w)^2$$

Wegen $\phi_{-\alpha} = (-\alpha) \circ \chi'_{-\alpha} = (-\alpha) \circ (\chi'_\alpha)^{-1} = \phi_\alpha$, hat man im asymmetrischen Fall $\Gamma_\pm = \Gamma_+$ dieselbe Rechnung noch für den Γ -Orbit von $-\alpha$. Indem man die Rechnung für alle Γ -Orbiten in $\Phi(G)$ (für r_p) und $\Phi(H)$ (für \bar{r}_p) zusammenrechnet, erhält man die Behauptung. \square

Nun sind alle Aussagen von 6.4 bis 6.11 bewiesen. Es folgen noch Korollare zum Beweis von Satz 6.9.

Korollar 6.12. *Das Bild von $a_T(w)$ in $\hat{G}/(\hat{G})_{der}$ ist dasselbe wie das von $m_\xi(\sigma)$ oder das von $t_\xi(\sigma)$ aus der Zerlegung $m_\xi(\sigma) = t_\xi(\sigma)n_\xi(\sigma)$ in (5.8).*

Beweis: Das folgt sofort aus der Berechnung von $a_T(w)$ in (ii) im zweiten Schritt des Beweises von 6.10: Sowohl r_p , $s_{q/p}$, \bar{r}_p , $\bar{s}_{q/p}$ als auch die Steinbergrepräsentanten (aus 2.7) und $n_\xi(\sigma)$ sind in \hat{G}_{der} konstruiert worden. (Im Übrigen hängt $m_\xi(w)$ nach der fundamentalen Annahme (5.17.5) bzw. nach Lemma 5.53 nur von dem Bild $w \mapsto \sigma \in \Gamma$ ab.) \square

Wenn T unverzweigt ist und die χ -Data unverzweigte Charaktere sind, hat man noch mehr als Lemma 6.11. Dann kann man $a_T(w)$ direkt benutzen, weil die Charakterisierung der unverzweigten Langlandsdualität in (3.37) stärker ist als die zahm verzweigte in (3.36): Man kann die Eigenschaft, unverzweigt zu sein, am Kozykel a_T selbst ablesen.

Korollar 6.13. *Wenn der Torus T unverzweigt ist und alle χ -Data unverzweigte Charaktere sind, ist $\langle a_T(w), \cdot \rangle_L \in \text{Hom}_{c,unv}(T(F), \mathbb{C}^\times)$.*

Beweis: Nach (3.37) ist zu zeigen: $a_T(u) = 1$ für alle $u \in \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times \subset W_{E/F}$. Man benutzt wieder die Darstellung (ii) auf Seite 115. Die Steinbergrepräsentanten sind 1 weil $\sigma = 1$ (das leere Wort produziert). Weil $\sigma \mapsto m_\xi(\sigma)$ ein 1-Kozykel (mit Werten in \hat{G}) ist, ist $a_T(u) = \bar{r}_p(u) \cdot r_p(u)^{-1}$. Daher berechnet man für die α -Faktoren von r_p (und analog \bar{r}_p):

$$\begin{aligned} r_{p,\alpha}(u) &= \prod_{w_\sigma \in R_+} \sigma(\alpha) \otimes \left((\chi_\alpha \circ r_{F_+}^{-1}) (w_\sigma^{-1} u w_\sigma) \right) \\ &= \prod_{w_\sigma \in R_+} \sigma(\alpha) \otimes \left(\chi_\alpha \left(\underbrace{\text{Norm}_{E/F_+}(\sigma^{-1} u)}_{\in \mathcal{O}_{F_+}^\times} \right) \right) = 1. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung benutzt zwei funktoriellen Eigenschaften der Reziprozitätsabbildung (nämlich "Konjugation"=[Ta79, (W_2)] und "Norm versus Inklusion"=[Ta79, (1.2.2)] aus (1.1)). \square

Korollar 6.14. *Der zentrale Charakter aus Satz 5.50.b ist unverzweigt.*

Beweis: Nach Lemma 5.44 gibt es ein Matching $\gamma \leftrightarrow \delta$ stark regulärer Elemente, so daß $\tilde{T} := \text{Cent}(G^\delta, \tilde{G})$ ein θ^* -stabiler erlaubter Torus ist und das Matching über $T := \tilde{T}^\circ$ und die zulässige Einbettung $T_H := \text{Cent}(\gamma, H) \rightarrow T_{\theta^*}$ geführt werden kann. Dies bedeutet nach der Definition in (5.41), daß \tilde{T} , T bzw. T_H unverzweigte Tori sind. Daher dürfen die χ -Data für $\Phi(G, T)_{\theta^*}$ bzw. $\Phi(H, T_H)$ unverzweigt gewählt werden. Wenn man Satz 5.50.b für diese Matching benutzt, ist man nach Korollar 6.13 fertig. \square

7 Reduktionen

(7.1) Sei \tilde{G} und H wie immer seit den fundamentalen Annahmen (5.17) und ω ein unitärer Charakter von $G(F)$. Insbesondere sind G und H quasisplit und zerfallen über einer unverzweigten Erweiterung F'/F mit $\text{Gal}(F'/F) = \langle \text{Fr} \rangle$. Man muß für das gesamte Kapitel hyperspezielle maximal kompakte Untergruppen wählen, denn die Iwasawazerlegung 4.12 geht wesentlich ein.

Sei x ein solcher Punkt, Θ^* die gesternte Aktion von L bezüglich eines F -Splittings $\mathbf{spl}_G(\mathbb{B}, \mathbb{T}, \{X_\alpha\})$, von denen man annimmt, daß $\Theta^*(x) = x$ und x im Appartement zum maximalen F -Splittorus \mathbb{T}_{sp} von \mathbb{T} liegt. Dann sei $K = G(F)_x$. Wegen Korollar 4.35 existiert nach der Annahme (5.17.3) ein residuell halbeinfaches Element $\theta' \in \tilde{\mathbb{T}}(F) \cap L$, Bis auf (gewisse) Faktoren aus $\mathbb{T}(F)_x = \mathbb{T}(F) \cap K$ ist θ' eindeutig bestimmt. (Vorsicht: Im Allgemeinen ist $\text{ord}\theta' > \text{ord}\Theta^* = |\pi_0(\tilde{G})| =: l$.)

Die hyperspezielle maximal kompakte Untergruppe K_H von $H(F)$ soll so gewählt werden, daß ein Matching $K_H \ni \gamma \leftrightarrow \delta \in K$ stark regulärer Elemente existiert. Nur diese Situation wird gebraucht. O.E. liege der spezielle Punkt zu K_H im Appartement zu $\mathbb{T}_{H,sp} \subset \mathbb{T}_H \in \mathbf{spl}_H$.

Der maximale F -Splittsubtorus eines Torus T wird mit T_{sp} bezeichnet. Sein dualer Torus wird oft \hat{T}_{sp} genannt statt (korrekter) $(T_{sp})^\wedge$. Als weitere gebräuchliche Bezeichnungen werden das unipotente Radikal \mathbb{U} von \mathbb{B} vorkommen, sowie der Modul $\delta_{\mathbb{B}}$ des (rechtsinvarianten) Haarmaßes auf $\mathbb{B}(F)$.

Definition 7.2. Die Heckealgebra $\mathcal{H}(\tilde{G}(F), K)$ von X ist die Algebra der stetigen, \mathbb{C} -wertigen Funktionen auf $X(F)$ mit kompaktem Träger, die invariant sind unter Rechts- und Linkstranslation mit Elementen aus K . Das Algebrenprodukt ist die Faltung $(f_1 * f_2)(x) = \int_{y \in G(F)} f_1(y) f_2(y^{-1}x) dy$.

Für eine (disjunkte) Vereinigung $X = \coprod_i (L_i)(F)$ von Zusammenhangskomponenten $L_i \subset \tilde{G}$ sei

$$\mathcal{H}(X, K) := C_c^\infty(K \backslash X(F) / K).$$

Man hat (kanonisch) $\mathcal{H}(X, K) \hookrightarrow \mathcal{H}(\tilde{G}, K)$ (als $\mathcal{H}(G(F), K)$ -Modul), indem man $f \in \mathcal{H}(X, K)$ trivial auf $\tilde{G}(F)$ ausdehnt.

Sataketransformation

Ziel der ersten beiden Abschnitte dieses Kapitels ist die Definition des Transfers von Heckefunktionen von G zur endoskopischen Gruppe H in (7.16). Dazu benutzt man ξ und die Sataketransformation. Hier wird die Theorie für zusammenhängende Gruppen referiert. Im nächsten Abschnitt wird die Sataketransformation auf \tilde{G} verallgemeinert.

(7.3) **unverzweigte Hauptserie:** Die Ordnungsabbildung ν , die in (4.1) bei der Konstruktion des Gebäudes eingeführt wurde, induziert Isomorphismen

$$\mathbb{T}(F)/\mathbb{T}(F)_c \xrightarrow{\sim \nu} X_*(\mathbb{T})^{\text{Gal}(\bar{F}/F)} = X_*(\mathbb{T}_{sp}) \xleftarrow{\sim \nu} \mathbb{T}_{sp}(F)/\mathbb{T}_{sp}(F)_c.$$

Dual dazu bekommt man

$$(i) \quad \text{Hom}_{unv}(\mathbb{T}(F), \mathbb{C}^\times) \simeq \text{Hom}(X_*(\mathbb{T}_{sp}), \mathbb{C}^\times) = (\mathbb{T}_{sp})^\wedge \stackrel{\text{Def.}}{=} \hat{\mathbb{T}}_{sp},$$

wobei der unverzweigte Charakter χ_s zu $s \in \hat{\mathbb{T}}_{sp}$ festgelegt ist durch $\chi_s(\mathfrak{p}_F^\lambda) = \lambda(s)$ für alle $\lambda \in X_*(\mathbb{T}_{sp}) = X^*(\hat{\mathbb{T}}_{sp})$.

Für einen unverzweigten Charakter χ von $\mathbb{T}(F)$ sei

$$I(\chi) = I_{\mathbb{B}}^G(\chi) := \left\{ f \in C^\infty(G(F), \mathbb{C}) \mid \begin{array}{l} f(tug) = \delta_{\mathbb{B}}^{\frac{1}{2}}(t)\chi(t)f(g) \\ \text{falls } t \in \mathbb{T}(F), u \in \mathbb{U}(F), g \in G(F) \end{array} \right\}.$$

Die unverzweigte Hauptseriendarstellung $\text{Hs}(\chi)$ von $G(F)$ zu χ ist die Rechtstranslation auf diesem Raum. Die K -fixierten Vektoren $I(\chi)^K$ bilden wegen der Iwasawazerlegung einen eindimensionalen Unterraum. Sei π_χ (bzw. $\pi_s := \pi_{\chi_s}$) der eindeutige irreduzible K -unverzweigte Konstituent der Hauptseriendarstellung $\text{Hs}(\chi)$ (bzw. $\text{Hs}(\chi_s)$). Genau dann sind π_s und π_t äquivalent, wenn s und t in einem $W(\hat{G})^{\text{Fr}}$ -Orbit von $\hat{\mathbb{T}}_{sp}(F)$ liegen. Sei $\Pi_{unv}(G(F))$ die Äquivalenzklassen von K -unverzweigten irreduziblen Darstellung von $G(F)$. Dann erhält man eine Bijektion

$$\hat{\mathbb{T}}_{sp}/W^{\text{Fr}} \xrightarrow{1-1} \Pi_{unv}(G(F)).$$

Satz 7.4 (Sataketransformation). *Es gibt einen Isomorphismus*

$$(\cdot)^\vee : \mathcal{H}(G, K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\hat{\mathbb{T}}_{sp}]^{W(\hat{G})^{\text{Fr}}}, \quad f \mapsto f^\vee := \left(s \mapsto \text{Tr}(\pi_s(f)) \right).$$

Beweis: [Car79, Theorem 4.1] □

(7.5) Dual zur Einbettung $\mathbb{T}_{sp} \hookrightarrow \mathbb{T}$ hat man eine Surjektion $i^\vee : \hat{\mathbb{T}} \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{T}}_{sp}$. Betrachte die Abbildungen

$$(\hat{G} \rtimes \text{Fr})_{\text{he}} \leftrightarrow \hat{\mathbb{T}} \rtimes \text{Fr} \xrightarrow{t \rtimes \text{Fr} \mapsto i^\vee(t)} \hat{\mathbb{T}}_{sp},$$

wobei links die halbeinfachen Elemente in $\hat{G} \rtimes \text{Fr}$ stehen. Nach [Bo79, 6.1+6.4.6.5] induzieren diese Abbildungen folgende Bijektionen ($\hat{N} := \text{Norm}(\hat{\mathbb{T}}, \hat{G})$)

$$(\hat{G} \rtimes \text{Fr})_{\text{he}}/\hat{G}\text{-Konj.} \xleftrightarrow{1-1} (\hat{\mathbb{T}} \rtimes \text{Fr})/\hat{N}^{\text{Fr}}\text{-Konj.} \xleftrightarrow{1-1} \hat{\mathbb{T}}_{sp}/W^{\text{Fr}}.$$

(7.6) Für den Spezialfall, daß $\hat{G} = \hat{\mathbb{T}}$ ein Torus ist, liefert nach [Bo79, 9.5] die Zusammensetzung

$$\text{Hom}_{unv}(\mathbb{T}(F), \mathbb{C}^\times) \stackrel{(i)}{\cong} \hat{\mathbb{T}}_{sp} \xleftrightarrow{1-1} (\hat{\mathbb{T}} \rtimes \text{Fr})/\hat{\mathbb{T}} \simeq H^1(\langle \text{Fr} \rangle, \hat{\mathbb{T}}) \xrightarrow{\text{infl}} H_{unv}^1(W_{E/F}, \hat{\mathbb{T}})$$

das Inverse rec^{-1} der (unverzweigten) Langlandschen Reziprozitätsabbildung aus (3.37).

(7.7) Definition von s_ω : Nach den Annahmen in (5.17.4) ist $\mathbf{a} \in H^1(\langle \text{Fr} \rangle, \text{Cent}(\hat{G}))$ vorgegeben und ergibt einen unverzweigten Charakter ω von $G(F)$. (Vergleiche [Bo79, 10.2].) Ab jetzt werden $H^1(\langle \text{Fr} \rangle, \text{Cent}(\hat{G})) \simeq (\text{Cent}(\hat{G}) \rtimes \text{Fr}) / \text{Cent}(\hat{G})$ identifiziert. Mit (7.5) erhält man

$$\hat{\mathbb{T}}_{sp}/W^{\text{Fr}} \leftarrow (\text{Cent}(\hat{G}) \rtimes \text{Fr}) / \text{Cent}(\hat{G}) \xrightarrow{\text{inf}} H^1(W_{F'/F}, \text{Cent}(\hat{G})) \rightarrow \text{Hom}(G(F), \mathbb{C}^\times)$$

Sei s_ω ein unverzweigter Charakter von $\mathbb{T}(F)$, so daß

$$s_\omega \longleftarrow [a'(\text{Fr}) \rtimes \text{Fr}] \longmapsto \mathbf{a}(w) \longmapsto \omega$$

unter den Abbildungen der letzten Zeile. Der Kozykel a' wurde in (5.3.4) gewählt.

Behauptung: $s_\omega \in i^\vee(\text{Cent}(\hat{G})) \subset \hat{\mathbb{T}}_{sp}$ ist die Einschränkung von ω auf $\mathbb{T}(F)$.

Beweis: Wenn $\text{Cent}(\hat{G})$ nicht zusammenhängt (d.h. wenn G_{der} nicht einfach zusammenhängt) benutzt man (wie in der Beschreibung der Isomorphie $H^1(W_F, \text{Cent}(\hat{G})) \simeq \text{Hom}(G(F), \mathbb{C}^\times)$ in [Bo79, 10.2]) eine z -Extension G_1 von G . (Vgl. (1.13).) Sei

$$1 \longrightarrow Z_1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

die zugehörige exakte Sequenz, in der $Z_1 \subset \text{Cent}(G_1)$ ein Torus ist mit $H^1(F, Z_1) = 1$ (so daß $G_1(F) \twoheadrightarrow G(F)$.) Weil Z_1 zusammenhängt erhält man dual dazu

$$1 \longrightarrow {}^L G \longrightarrow {}^L G_1 \longrightarrow {}^L Z_1 \longrightarrow 1.$$

Sei $\mathbb{T}_1 \subset G_1$ der Torus über \mathbb{T} . Weil $G_{1,der}$ einfach zusammenhängt, ist $\text{Cent}(\hat{G}_1)$ ein Torus und dual zu $D := G_1/G_{1,der} = \mathbb{T}_1/\mathbb{T}_{1,der}$. Man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{T}}_{sp}/W^{\text{Fr}} & \xleftarrow{\text{über (7.5)}} & (\text{Cent}(\hat{G}) \rtimes \text{Fr}) / \text{Cent}(\hat{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \text{durch Inklusion} \\ \hat{\mathbb{T}}_{1,sp}/W^{\text{Fr}} & \xleftarrow{\text{über (7.5)}} & (\text{Cent}(\hat{G}_1) \rtimes \text{Fr}) / \text{Cent}(\hat{G}_1) \\ \uparrow & & \parallel \\ ((\mathbb{T}_1/\mathbb{T}_{1,der})_{sp})^\wedge & \xleftarrow{\text{über (7.6)}} & (\hat{D} \rtimes \text{Fr}) / \hat{D}. \end{array}$$

Andererseits wird ω in [Bo79, 10.2] so konstruiert, daß man das kommutative Diagramm hat

$$\begin{array}{ccc} H^1(W_{F'/F}, \text{Cent}(\hat{G})) & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & \text{Hom}(G(F), \mathbb{C}^\times) \\ \downarrow \text{durch Inkl.} & & \downarrow \\ H^1(W_{F'/F}, \text{Cent}(\hat{G}_1)) & \xrightarrow{rec} \text{Hom}((G_1/G_{1,der})(F), \mathbb{C}^\times) \longrightarrow & \text{Hom}(G_1(F), \mathbb{C}^\times) \end{array}$$

Durch Zusammensetzen der untersten Zeile der beiden kommutativen Diagramme erhält man wegen (7.6)

$$((\mathbb{T}_1/\mathbb{T}_{1,der})_{sp}^\wedge \xleftarrow{\quad} (\hat{D} \rtimes \text{Fr})/\hat{D} \xrightarrow[\text{inf}]{\quad} H^1(W_{F'/F}, \text{Cent}(\hat{G}_1)) \xrightarrow{rec} \text{Hom}((\mathbb{T}_1/\mathbb{T}_{1,der})(F), \mathbb{C}^\times))$$

$\xrightarrow{rec^{-1}}$

als Kompositum genau die Identifizierung (i) in (7.3). Nach Definition von s_ω wird dabei der Pullback von s_ω auf den von ω abgebildet. Indem man alles auf \mathbb{T} drückt, hat man die Behauptung. Das geht nach der Konstruktion von ω in [Bo79, 10.2] bzw. nach den kommutativen Diagrammen oben. \square

Sataketransformation mit Twist

Behauptung 7.8. *Betrachte*

$$\Pi(G, \theta, \mathbf{a}) := \{[\pi_s] \in \Pi_{unv}(G(F)) \mid \pi_s \circ \Theta^* \text{ ist äquivalent zu } \omega \cdot \pi_s\}$$

und folgende algebraische Teilmenge von $\hat{\mathbb{T}}_{sp}$ (den unverzweigten Charakteren von $\mathbb{T}(F)$):

$$\Pi(\Theta^*, \omega) := \{s \in \hat{\mathbb{T}}_{sp} \mid \exists w \in W(\hat{G})^{\text{Fr}} \text{ mit } w\hat{\theta}(s)w^{-1} = s_\omega \cdot s\}.$$

Weil s_ω invariant ist unter W^{Fr} , ist diese Menge stabil unter der Operation von W^{Fr} . Unter der Bijektion $\hat{\mathbb{T}}_{sp}/W^{\text{Fr}} \longleftrightarrow \Pi_{unv}(G(F))$ in (7.3) korrespondieren

$$\Pi(\Theta^*, \omega)/W^{\text{Fr}} \xrightarrow{1-1} \Pi(G, \theta, \mathbf{a})$$

Beweis: Nach (7.3) ist $\pi_{\hat{\theta}(s)}$ äquivalent zu $\pi_{s_\omega s}$ genau dann, wenn $\hat{\theta}(s)$ und $s_\omega s$ unter der Weylgruppe W^{Fr} konjugiert sind. Daher reicht es, zu zeigen, daß $\pi_{\hat{\theta}(s)} \sim \pi_s \circ \Theta^*$ und $\pi_{s_\omega s} \sim \omega \cdot \pi_s$. (\sim bezeichne Äquivalenz.) Beide Äquivalenzen folgen aus den Definitionen: Unter $\hat{\mathbb{T}}_{sp} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{unv}(\mathbb{T}(F), \mathbb{C}^\times)$ hat man wegen (7.7) zum einen $s_\omega s \mapsto \omega \cdot \chi$ und zum anderen $\hat{\theta}(s) \mapsto \chi_s \circ \Theta^*$ (nach Definition von $\hat{\theta}$). \square

Lemma 7.9. *Sei ω unitär. Dann gibt es in jeder W^{Fr} -Konjugationsklasse von $\Pi(\Theta^*, \omega)$ ein $s \in \hat{\mathbb{T}}_{sp}$, so daß ein Intertwiner $I_{\Theta^*} : I(\chi_s) \rightarrow I(\chi_s)$ existiert, der π_s vertauscht mit $\omega^{-1} \otimes (\pi_s \circ \Theta^*)$.*

Beweis: Weil $\hat{\mathbb{T}}_{sp} \simeq \mathbb{C}^{\times m}$ für ein $m \in \mathbb{N}$, ergeben die Polarkoordinaten für \mathbb{C} eine eindeutige Zerlegung $\hat{\mathbb{T}}_{sp} \ni s = r \cdot u$, so daß alle Eigenwerte von r positiv reell sind und alle Eigenwerte von u vom Betrag 1. Dieser Zerlegung entspricht die Zerlegung $\chi_s = (|\cdot| \circ \chi_s) \cdot \chi_{s, \text{unitär}}$, wobei $\chi_{s, \text{unitär}}$ unitär ist.

Sei nun $s \in \Pi(\Theta^*, \omega)$. Durch W^{Fr} -Konjugation kann man erreichen, daß r in der positiven Weylkammer zu \mathbb{B} liegt, d.h. $\alpha(r) \geq 1$ für alle $\alpha^\vee \in \Delta = \Delta(G, \mathbb{B}, \mathbb{T})$.

Fixiere ab jetzt $s = r \cdot u$ mit diesen Eigenschaften. Dann ist der unverzweigte Konstituent π_s von $I(\chi_s)$ ein Untermodul.

Durch r wird vermöge $\{\alpha \in \Delta \mid \alpha^\vee(r) > 1\}$ eine Parabolische $P \supset \mathbb{B}$ zugeordnet. Sei M die Levigruppe von P , die \mathbb{T} enthält. Dann ist $r \in \text{Cent}(M)$ und $\Phi(M, \mathbb{T}) = \{\alpha \in \Phi(G, \mathbb{T}) \mid \alpha^\vee(r) = 1\}$.

Die folgende Überlegung zeigt, daß M und P Θ^* -stabil sind. Weil ω unitär angenommen wird, bedeutet $s \in \Pi(\Theta^*, \omega)$, daß ein $w \in W^{\text{Fr}}$ existiert, so daß zugleich $(\text{int} w \circ \hat{\theta})(r) = r$ und $(\text{int} w \circ \hat{\theta})(u) = s_\omega \cdot u$. (Insbesondere liegt $u \in \Pi(\Theta^*, \omega)$.) Da $\hat{\theta}$ die positive Weylkammer zu \mathbb{B} stabil läßt, folgt sofort, daß $w \in \text{Stab}_r(W^{\text{Fr}}) \subset W(M, \mathbb{T})^{\text{Fr}}$ und $\hat{\theta}(r) = r$. Daher ist M stabil unter Θ^* .

Weil $\alpha(r) = 1$ für $\alpha \in \Phi(M)$ und weil man aus positiven Zahlen (eindeutig positiv reelle) Wurzeln ziehen kann, kann man den Charakter $\chi_s = |\cdot| \circ \chi_s$ zu einem Θ^* -stabilen Charakter von M ausdehnen. Man hat

$$I(\chi_s) = I_{\mathbb{B}}^G(\chi_s) \simeq I_P^G\left(I_{\mathbb{B} \cap M}^M(\chi_{s, \text{unitär}}) \otimes \chi_r\right),$$

wobei die unverzweigte Haupseriendarstellung $\Pi_M := I_{\mathbb{B} \cap M}^M(\chi_{s, \text{unitär}}) \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq m} \pi_i$ vollständig in irreduzible Komponenten π_i zerfällt, weil die Darstellung Π_M unitarisierbar ist. Also gilt

$$I(\chi_s) \simeq I_P^G\left(\Pi_M \otimes \chi_r\right) \simeq \bigoplus_{i=1}^m I_P^G(\pi_i \otimes \chi_r)$$

und der unverzweigte Konstituent ist ein Untermodul genau eines Summanden auf der rechten Seite: O.E. $\pi_s \hookrightarrow I_P^G(\pi_1 \otimes \chi_r) \hookrightarrow I(\chi_s)$.

Weil $u \in \Pi(\Theta^*, \omega)$, gibt es einen Intertwiner $I_{\Theta^*, M} : \Pi_M \circ \Theta^* \rightarrow \omega \otimes \Pi_M$. Da P und χ_r Θ^* -stabil sind, kann man den Intertwiner I_{Θ^*} als Abbildung von

$$I_P^G(\Pi_M \otimes \chi_r) = \left\{ f : G(F) \rightarrow \Pi_M \otimes \chi_r \left| \begin{array}{l} f \text{ ist lokalkonstant und} \\ f(mng) = (\delta_P^{1/2} \cdot \chi_r)(m) \cdot \Pi_M(m)(f(g)) \\ \text{für alle } m \in M(F), n \in N_P(F) \end{array} \right. \right\}$$

auf sich definieren durch

$$f \xrightarrow{I_{\Theta^*}} \left[g \longmapsto \omega^{-1}(g) \cdot I_{\Theta^*, M}\left(f(\Theta^*(g))\right) \right].$$

Um einzusehen, daß dies ist eine Selbstabbildung von $I_P^G(\Pi_M \otimes \chi_r) \simeq I(\chi_s)$ ist, genügt (wegen der Iwasawazerlegung) folgende Rechnung für alle $m \in M(F)$, $n \in N_P(F)$ und $k \in K = G(F)_x$:

$$\begin{aligned} (I_{\Theta^*} f)(mnk) &= \omega(mnk)^{-1} I_{\Theta^*, M}(f(\Theta^*(mnk))) \\ &= \omega(m)^{-1} \delta_P^{1/2}(\Theta^*(m)) \chi_r(\Theta^*(m)) \left(I_{\Theta^*, M} \circ \Pi_M(\Theta^*(m)) \right) (f(\Theta^*(k))), \end{aligned}$$

weil ω unverzweigt ist. Weil $\delta_P(m) = \delta_P(\Theta^*(m))$, folgt

$$= \omega(m)^{-1} \delta_P^{1/2}(m) \chi_r(m) \omega(m) \left(\Pi_M \circ I_{\Theta^*, M}(m) \right) (f(\Theta^*(k))).$$

Ebenfalls nach der Iwasawazerlegung folgt, daß der spärliche Untermodul $\pi_s \hookrightarrow I(\chi_s)$ durch I_{Θ^*} in sich übergeführt wird und dort den behauptete Intertwiner bewirkt. \square

(7.10) Nach der Annahme (5.17.3) gibt es ein $t' \in \mathbb{T}(F')$, so daß $\text{int}\theta' = \text{int}t' \circ \Theta^*$. Weil $\chi_s \circ \text{int}t' = \chi_s$, ist durch $(I_{t'}f)(g) := f(tgt^{-1})$ ein Intertwiner $I_{t'} : I(\chi_s) \rightarrow I(\chi_s)$ gegeben, der π_s mit $\pi_s \circ \text{int}t'$ vertauscht.

(7.11) Definition von $\tilde{\pi}_s^1$: Sei $s \in \Pi(\Theta^*, \omega)$ in seiner W^{Fr} -Konjugationsklasse, so daß der Intertwiner I_{Θ^*} aus Lemma 7.9 existiert. Zusammen mit (7.10) erhält man einen Intertwiner $I_{\theta'} = I_{t'} \circ I_{\Theta^*} : I(\chi_s) \rightarrow I(\chi_s)$, der π_s vertauscht mit $\omega^{-1} \otimes (\pi_s \circ \Theta')$, wobei $\Theta' := \text{int}\theta'$. Indem man fordert, daß alle Intertwiner trivial auf der Geraden $I(\chi_s)^K$ operieren, ist $I_{\theta'}$ kanonisch bestimmt.

Durch die Vorgabe $\tilde{\pi}_s(\theta') := I_{\theta'}$ kann man daher π_s zu einer projektiven Darstellung von $\tilde{G}(F)$ liften (die $\tilde{G}(F)_x$ -fixierte Vektoren besitzt). Da man an Spuren interessiert ist, liftet man diese projektive Darstellung zu einer Darstellung einer Gruppe \tilde{G}^1 wie folgt:

Sei $G_0 := \text{Kern}(\omega) \subset G(F)$ und \tilde{G}^1 das semidirekte Produkt von $G^1 := G(F) \times (G(F)/G_0)$ mit θ^1 , so daß

$$\text{int}\theta^1 : G^1 \longrightarrow G^1 \quad (g, x) \longmapsto ((\text{int}\theta')(g), \bar{g} \cdot x).$$

Durch Iterieren folgt aus $w\hat{\theta}(s)w^{-1} = s_\omega \cdot s$ wegen $s_\omega \in \mathbb{T}_{sp}^{W^{\text{Fr}}}$

$$s = \hat{\theta}^l(s) = s_\omega \cdot \hat{\theta}(s_\omega) \cdots \hat{\theta}^{l-1}(s_\omega) \cdot w_1^{-1} s w_1$$

für ein geeignetes $w_1 \in W^{\text{Fr}}$. Weil die Weylgruppe endlich ist, folgt durch weiteres Iterieren dieser Gleichung, daß $s_\omega \cdots \hat{\theta}^{l-1}(s_\omega)$ endliche Ordnung hat. Somit gibt ein $N_1 \in \text{ord}\theta' \cdot \mathbb{Z} \supset l\mathbb{Z}$, so daß $\omega \cdot (\omega \circ \Theta') \cdots (\omega \circ \Theta'^{N_1-1}) \equiv 1$. Insgesamt darf man deswegen $\tilde{G}^1 = G^1 \rtimes \mathbb{Z}/N_1$ annehmen bzw. $\text{ord}\theta^1 = N_1$, denn $(\text{int}\theta^1)^{N_1}(g, x) = (\Theta'^{N_1}(g), x \cdot \bar{g} \cdot \Theta'(\bar{g}) \cdots \Theta'^{N_1-1}(\bar{g})) = (g, x)$. Durch $\text{mult}((g, x) \rtimes (\theta^1)^k) := g\theta'^k \in \tilde{G}(F)$ wird eine Surjektion $\tilde{G}^1 \twoheadrightarrow \tilde{G}(F)$ definiert mit $(\text{Kern}(\text{mult}))^\circ = 1 \times (G(F)/G_0) \subset G^1$. Indem man die Darstellung π_s durch $\pi_s^1(g, x) := \omega(x)^{-1} \cdot \pi_s(g)$ liftet zu einer Darstellung der Gruppe G^1 , hat man für den Intertwiner $I_{\theta'}$ oben:

$$\pi_s^1((\text{int}\theta^1)(g, x)) = \omega^{-1}(gx) \cdot \pi_s(\Theta'(g)) = \omega^{-1}(x) \cdot I_{\theta'} \pi_s(g) I_{\theta'}^{-1} = I_{\theta'} \pi_s^1(g, x) I_{\theta'}^{-1}.$$

Also wird durch $g^1 \cdot (\theta^1)^m \mapsto \pi_s^1(g^1) I_{\theta'}^m$ (für alle $g^1 \in G^1$, $m \in \mathbb{Z}$) eine Darstellung $\tilde{\pi}_s^1$ von \tilde{G}^1 definiert.

(7.12) Definition von f^1 :

Bezeichne K^1 die kompakte Untergruppe $K \times (K \cdot G_0/G_0)$ von G^1 . (K^1 muß keine maximal kompakte Untergruppe von G^1 sein!) Für das Folgende wird die Heckealgebra $\mathcal{H}(\tilde{G}(F), K)$ durch

$$f \longmapsto f^1 := \left((g, x) \rtimes (\theta^1)^m \mapsto \begin{cases} f(g\theta'^m) & \text{falls } x \in K^1 \text{ und } 0 \leq m < l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right)$$

(als $\mathcal{H}(G(F), K)$ -Modul) in die Heckealgebra $\mathcal{H}(\tilde{G}^1, K^1) = C^\infty(K^1 \backslash \tilde{G}^1 / K^1)$ eingebettet.

(7.13) Sataketransformation zum zweiten: Mit den bisherigen Bezeichnungen ergibt $f^\vee(s) := \text{Tr}(\tilde{\pi}_s^1(f^1))$ eine (wohldefinierte) Abbildung

$$(\cdot)^\vee : \mathcal{H}(\tilde{G}, K) \longrightarrow \mathbb{C}[\Pi(\Theta^*, \omega)/W(\hat{G})^{\text{Fr}}] = \mathbb{C}[\Pi(\Theta^*, \omega)]^{W^{\text{Fr}}}.$$

Dabei ist $\mathbb{C}[\Pi(\Theta^*, \omega)]$ die Algebra der regulären Funktionen auf der algebraischen Teilmenge $\Pi(\Theta^*, \omega) \subset \hat{\mathbb{T}}_{sp}$. Genauer hat man folgendes

Lemma 7.14. *Sei $f \in \mathcal{H}(\tilde{G}, K)$ und $s \in \Pi(\Theta^*, \omega) \subset \hat{\mathbb{T}}_{sp}$. Dann gilt*

$$(a) \quad f^\vee(s) = \text{Tr}(\tilde{\pi}_s^1(f^1)) = \sum_{\lambda \in X_*(\mathbb{T}_{sp}) = X^*(\hat{\mathbb{T}}_{sp})} \lambda(s) \cdot (Sf)(\mathfrak{p}_F^\lambda),$$

wobei $S : \mathcal{H}(\tilde{G}, K) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{T}, \mathbb{T}(F)_c)$ bei Wahl eines geeigneten Haarmaßes $d\tilde{u}$ auf $\tilde{\mathbb{U}} := \langle \mathbb{U}, \theta' \rangle \subset \tilde{G}$ gegeben ist durch

$$(Sf)(x) = \delta_{\mathbb{B}}^{\frac{1}{2}}(x) \cdot \int_{\tilde{\mathbb{U}}(F)} f(x\tilde{u})d\tilde{u} = \delta_{\mathbb{B}}^{\frac{1}{2}}(x) \sum_{i=1}^{|\pi_0(\tilde{G})|} \int_{\mathbb{U}(F)} f(xu\theta'^i)du.$$

$$(b) \quad \text{Tr}(\tilde{\pi}_s^1(L_z(f^1))) = \chi_s(z) \cdot \text{Tr}(\tilde{\pi}_s^1(f^1)),$$

wobei L_z die Linkstranslation ($f \mapsto f(z^{-1} \cdot)$) von Funktionen mit $z \in \text{Cent}(G)(F)$ bezeichnet.

Beweis: Die Haarmaße auf $\tilde{G}(F)$, K , $\mathbb{U}(F)$, $\mathbb{T}(F)$, \tilde{G}^1 seien so normiert, daß das Volumen von K , $\mathbb{U}(F) \cap K$, $\mathbb{T}(F)_c$ bzw. K^1 Eins wird.

Die Abbildung S ist wohldefiniert: Sie hängt nicht von θ' ab, weil sich jedes andere θ'' um Elemente aus $K \cap \mathbb{T}$ unterscheidet. Ebenso ist die Summe unbedenklich, selbst wenn $\text{ord}\theta' > |\pi_0(\tilde{G})| =: l$ ist, denn $\theta'^l \in K \cap \mathbb{T}$. Außerdem hängt $(Sf)(x)$ nur ab von der Restklasse von x in $\mathbb{T}(F)/\mathbb{T}(F)_c \simeq X_*(\mathbb{T}_{sp})$.

Die Funktion $f_K \in I(\chi_s)$, für die $f_K(tuk) = \delta_{\mathbb{B}}^{1/2}(t) \cdot \chi_s(t)$, ist Basis der K -fixierten

Gerade in $\tilde{\pi}_s^1$. Die Iwasawazerlegung mit θ' -stabilem K ergibt eine Zerlegung des Haarmaßes, so daß

$$\begin{aligned}
f^\vee(s) &= \text{Tr}(\tilde{\pi}_s^1(f^1)) = \int_{\tilde{G}^1} \text{Tr}(\tilde{\pi}_s^1(\tilde{g}^1)|_{\langle f_K \rangle}) \cdot f^1(\tilde{g}^1) d\tilde{g}^1 \\
&= \sum_{i=0}^{N_1-1} \int_{G^1} \text{Tr} \left(\tilde{\pi}_s^1 \left((g, x) \rtimes (\theta^1)^i \right) \Big|_{\langle f_K \rangle} \right) \cdot f^1 \left((g, x) \rtimes (\theta^1)^i \right) dg \\
&= \sum_{i=0}^{l-1} \int_{G(F)} \int_{KG_0/G_0} \underbrace{\omega^{-1}(x)}_{=1} \cdot f_K(g) \cdot f(g\theta'^i) dx dg \\
&= \text{vol}_{dx}(KG_0/G_0) \int_{\mathbb{T}(F)} \int_{\mathbb{U}(F)} \sum_{i=0}^{l-1} \int_K \delta_{\mathbb{B}}^{\frac{1}{2}}(t) \chi_s(t) f(tu\theta'^i k) dk dndt \\
&= \text{vol}_{dk}(K) \int_{\mathbb{T}(F)} \chi_s(t) \cdot \left(\delta_{\mathbb{B}}^{\frac{1}{2}}(t) \int_{\mathbb{U}(F)} \sum_{i=0}^{l-1} f(tu\theta'^i) du \right) dt \\
&= \text{vol}_{dt}(\mathbb{T}(F)_c) \sum_{\substack{t=\mathfrak{p}_F^\lambda \in \mathbb{T}(F)/\mathbb{T}(F)_c \\ (\text{d.h. } \lambda \in X_*(\mathbb{T}_{sp}) \simeq \mathbb{T}(F)/\mathbb{T}(F)_c)}} \chi_s(\mathfrak{p}_F^\lambda) \cdot \left(\delta_{\mathbb{B}}^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{p}_F^\lambda) \int_{\tilde{\mathbb{U}}(F)} f(\mathfrak{p}_F^\lambda \tilde{u}) d\tilde{u} \right) \\
&\stackrel{(7.3)}{=} \sum_{\lambda \in X_*(\mathbb{T}_{sp}) = X^*(\hat{\mathbb{T}}_{sp})} \lambda(s) \cdot (Sf)(\mathfrak{p}_F^\lambda)
\end{aligned}$$

Die Aussage (b) ist nun nur die Translationsinvarianz des Haarmaßes:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\tilde{\pi}_s^1(L_z(f^1))) &= \int_{\tilde{G}(F)} \text{Tr}(\tilde{\pi}_s^1(\tilde{g})) f^1(z^{-1}\tilde{g}) d\tilde{g} = \int_{\tilde{G}(F)} \text{Tr}(\tilde{\pi}_s^1(z\tilde{g})) f^1(\tilde{g}) d\tilde{g} \\
&\dots = \chi_s(z) \text{Tr}(\tilde{\pi}_s^1(f^1)). \quad \square
\end{aligned}$$

(7.15) Das Bild von $\Pi(\Theta^*, \omega)/W^{\text{Fr}}$ unter den Bijektionen in (7.5) ist

$$\Pi(\hat{G}, \hat{\theta}, a') := \{g \rtimes \text{Fr} \in (\hat{G} \rtimes \text{Fr})_{he} \mid \hat{\theta}(g) \rtimes \text{Fr} \text{ ist } \hat{G}\text{-konjugiert zu } a'(\text{Fr}) \cdot g \rtimes \text{Fr}\}$$

modulo \hat{G} -Konjugation, wobei der Kozykel a' der Klasse \mathbf{a} bei der Definition der endoskopischen Gruppe in (5.3) gewählt wurde. Es gilt $\xi((\hat{H} \rtimes \text{Fr})_{he}) \subset \Pi(\hat{G}, \hat{\theta}, a')$, denn für $h \in \hat{H}$ gilt nach (5.3.4)

$$\begin{aligned}
(\text{ints} \circ \hat{\theta})(\xi(h \rtimes \text{Fr})) &= (\text{ints} \circ \hat{\theta})(hm_\xi(\text{Fr}) \rtimes \text{Fr}) = h \cdot (\text{ints} \circ \hat{\theta})(m_\xi(\text{Fr}) \rtimes \text{Fr}) \\
&= h \cdot a'(\text{Fr}) \cdot m_\xi(\text{Fr}) \rtimes \text{Fr} = a'(\text{Fr}) \cdot \xi(h \rtimes \text{Fr}).
\end{aligned}$$

(7.16) Transfer von Funktionen: Definition von b_ξ : Wegen des letzten Absatzes wird durch ξ und Bijektionen in (7.5) (für \hat{H} und \hat{G}) folgende Abbildung

$\tilde{\xi}$ definiert:

$$(ii) \quad \begin{array}{ccc} (\hat{H} \rtimes \text{Fr})_{h.e.} / \hat{H}\text{-Konj.} & \xrightarrow{\bar{\xi}} & \Pi(\hat{G}, \hat{\theta}, a') / \hat{G}\text{-Konj.} \\ \uparrow 1-1 & & \uparrow 1-1 \\ \hat{\mathbb{T}}_{H,sp} / W(\hat{H})^{\text{Fr}} & \xrightarrow{\tilde{\xi}} & \Pi(\Theta^*, \omega) / W(\hat{G})^{\text{Fr}}. \end{array}$$

Dabei wird rechts (7.5) für \hat{H} (mit dem maximal F -Splittorus $\mathbb{T}_{H,sp}$) benützt. Damit hat man die Abbildung

$$b_{\xi} : \mathcal{H}(\tilde{G}, K) \xrightarrow[\text{Satake}]{(7.13)} \mathbb{C}[\Pi(\Theta^*, \omega)]^{W(\hat{G})^{\text{Fr}}} \xrightarrow{\tilde{\xi}^*} \mathbb{C}[\hat{\mathbb{T}}_{H,sp}]^{W(\hat{H})^{\text{Fr}}} \xleftarrow[\text{Satake}]{(7.4)} \mathcal{H}(H, K_H)$$

und zwar so, daß zu gegebenem $f \in \mathcal{H}(\tilde{G}, K)$ die Funktion $b_{\xi}(f)$ charakterisiert ist durch

$$(iii) \quad \text{Tr} \left(\tilde{\pi}_{\xi(s)}^1(f^1) \right) = \text{Tr}(\pi_s(b_{\xi}(f)))$$

für alle $s \in \hat{\mathbb{T}}_{H,sp}$. Knapper (aber etwas unklar) formuliert: $f^{\vee}(\tilde{\xi}(s)) = (b_{\xi}(f))^{\vee}(s)$. (Vorsicht mit $\tilde{\xi}(s)$: Gemeint sind W^{Fr} -Konjugationsklassen!)

Abstieg auf die derivierte Gruppe

Vermutung 7.17 (Fundamentales Lemma, Langlands). *Gegeben sei eine endoskopische Datum (H, \mathcal{H}, s, ξ) zu (G, θ, \mathbf{a}) . Sei $f \in \mathcal{H}(L(F), K) \subset \mathcal{H}(\tilde{G}, G(F)_x)$ und $\gamma \in H(F)$ stark regulär. Dann gilt bei geeigneter Normierung der Maße*

$$\sum_{\delta \in L(F)/G(F)\text{-Konj.}} \Delta^x(\gamma, \delta) O_{\delta}^{L, \omega}(f) = O_{\gamma}^{H, st}(b_{\xi}(f)) := \sum_{\substack{H(F)\text{-Konj.klassen von } \gamma' \text{ aus} \\ \text{der stabilen Konj.klasse von } \gamma}} O_{\gamma'}^H(b_{\xi}(f))$$

Lemma 7.18 ([Hal93, 11.3]). *Für $z \in \text{Cent}(G)^{\circ}(F)$ gilt*

$$L_{z_H}(b_{\xi}(f)) = \langle a_T, z \rangle_L^{-1} \cdot b_{\xi}(L_z(f)),$$

wobei z_H das Bild von z in $\text{Cent}(H)(F)^{\circ}$ ist (vgl. (5.6)). (Mit L_x werden wieder Linkstranslationen ($f \mapsto f(x^{-1} \cdot)$) auf den Heckealgebren $\mathcal{H}(H, K_H)$ bzw. $\mathcal{H}(\tilde{G}, K)$ bezeichnet.)

Beweis: Sei $Z_G := \text{Cent}(G)^{\circ}$.

1. Schritt: Wegen des Satakeisomorphismus 7.4 wird die Aussage für die Fouriertransformierte gezeigt werden. Sei dazu $s_H \in \hat{\mathbb{T}}_{H,sp}$ und $s_G \in \hat{\mathbb{T}}_{sp}$ aus dem $W(\hat{G})^{\text{Fr}}$ -Orbit $\tilde{\xi}(s_H)$. In den beiden oberen Mengen des Diagramms (ii) in (7.16) mögen $t_H \rtimes \text{Fr}$ bzw. $t_G \rtimes \text{Fr}$ (mit $t_H \in \mathbb{T}_H$, $t_G \in \mathbb{T}$) die jeweiligen Bilder von s_H bzw. s_G repräsentieren.

2. Schritt: Reduktion auf eine Charakteridentität.

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left(\pi_{s_H}(b_\xi(L_z(f)))\right) &\stackrel{\text{(iii)}}{=} \mathrm{Tr}\left(\tilde{\pi}_{s_G}^1(L_z(f^1))\right) \stackrel{(7.14.b)}{=} \chi_{s_G}(z) \cdot \mathrm{Tr}\left(\tilde{\pi}_{s_G}^1(f^1)\right) \\ &\stackrel{\text{(iii)}}{=} \chi_{s_G}(z) \cdot \mathrm{Tr}\left(\pi_{s_H}(b_\xi(f))\right) \\ &\stackrel{(7.14.b)}{=} \chi_{s_G}(z) \chi_{s_H}(z_H)^{-1} \cdot \mathrm{Tr}\left(\pi_{s_H}(L_{z_H}(b_\xi(f)))\right) \end{aligned}$$

wobei χ_{s_G} der zu s_G assoziierte Charakter aus $\Pi(\mathbb{T}(F), \theta', \omega)$ ist. Man ist daher fertig, wenn gezeigt ist, daß

$$\chi_{s_G}(z) \cdot \chi_{s_H}(z_H)^{-1} = \langle a_T, z \rangle_L \quad \text{für } z \in \mathrm{Cent}^\circ(G)(F) \stackrel{\text{Def.}}{=} Z_G(F).$$

3. Schritt: Nach Satz 5.50.b ist die Abbildung $Z_G(G) \rightarrow Z_G(G)_{\Theta^*} \rightarrow \mathrm{Cent}(H)$ induziert durch die duale Abbildung zu $\hat{\mathbb{T}}_H = \mathcal{T}_H \xrightarrow{\xi} \mathcal{T}^{\hat{\theta}^\circ} = \hat{\mathbb{T}}^{\hat{\theta}^\circ} \subset \hat{\mathbb{T}}$, die auch zur Identifikation

$$\phi : \mathrm{Hom}_{\mathrm{unv}}(\mathbb{T}_H(F), \mathbb{C}^\times) = \hat{\mathbb{T}}_{H,sp} = \hat{\mathbb{T}}_{sp}^{\hat{\theta}^\circ} \subset \hat{\mathbb{T}}_{sp} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{unv}}(\mathbb{T}(F), \mathbb{C}^\times)$$

benutzt wird. Daher ist zu zeigen, daß auf $Z_G(F)$ gilt $\chi_{s_G} \cdot \phi(\chi_{s_H})^{-1} = \langle a_T, \cdot \rangle_L$. Eine äquivalente kohomologische Formulierung in $H_{\mathrm{unv}}^1(W_{E/F}, \widehat{Z}_G) = (\widehat{Z}_G \rtimes \mathrm{Fr}) / \widehat{Z}_G$ lautet mit (7.5):

$$t_G^{-1} \cdot t_H \cdot a_T(\mathrm{Fr}) \in (1 - \mathrm{Fr}) \widehat{Z}_G.$$

4. Schritt: Nach Definition ist $t_G \hat{G}_{\mathrm{der}}$ -konjugiert zu $\xi(t_H \rtimes \mathrm{Fr}) = t_H m_\xi(\mathrm{Fr}) \rtimes \mathrm{Fr}$. Wegen Korollar 6.12 errechnet man in $\hat{G}/(\hat{G})_{\mathrm{der}}$

$$t_G^{-1} \cdot t_H \cdot a_T(\mathrm{Fr}) \equiv (t_H m_\xi(\mathrm{Fr}))^{-1} \cdot t_H \cdot m_\xi(\mathrm{Fr}) \equiv 1 \pmod{\hat{G}_{\mathrm{der}}}.$$

5. Schritt: Man hat $1 \rightarrow (\hat{\mathbb{T}})_{\mathrm{der}} \rightarrow \hat{\mathbb{T}} \rightarrow \widehat{Z}_G \rightarrow 1$, denn mit $V_{\mathrm{der}}^* := \mathbb{Z}[\Phi(G)] \otimes \mathbb{R}$ gilt $X^*(\widehat{Z}_G) = X_*(\mathrm{Cent}(G)^\circ) = X_*(\mathbb{T}) \cap (V_{\mathrm{der}}^*)^\perp$ und

$$X^*(\hat{\mathbb{T}}_{\mathrm{der}}) = X^*(\hat{\mathbb{T}}) / ((\mathbb{Z}[\Phi^\vee(\hat{G})] \otimes \mathbb{R})^\perp \cap X^*(\hat{\mathbb{T}})) = X_*(\mathbb{T}) / (V_{\mathrm{der}}^{*\perp} \cap X_*(\mathbb{T})).$$

Weil $\hat{G}/\hat{G}_{\mathrm{der}} = \hat{\mathbb{T}}/\hat{\mathbb{T}}_{\mathrm{der}} \simeq \widehat{Z}_G$ hat man im vierten Schritt tatsächlich $t_G^{-1} \cdot t_H \cdot a_T(\mathrm{Fr}) \in \hat{\mathbb{T}}/\hat{\mathbb{T}}_{\mathrm{der}} \simeq \widehat{Z}_G$ nachgewiesen und ist fertig. \square

Satz 7.19. *Das fundamentale Lemma 7.17 gilt für die Gruppe \tilde{G} , wenn es für die von G_{der} und θ' (aus (7.1)) erzeugte Gruppe gilt.*

(Nota bene: Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten dieser Untergruppe von \tilde{G} ist ein Vielfaches von $\pi_0(\tilde{G})$. Nur wenn $\theta'^l \in G_{\mathrm{der}}$ bleibt sie gleich.)

Beweis: Sei $z \in \mathrm{Cent}(G)^\circ(F)$ und z_H sein Bild in $\mathrm{Cent}(H)^\circ(F)$.

$$\begin{aligned} \sum_{z^{-1}\delta} \Delta^x(z_H^{-1}\gamma, z^{-1}\delta) O_{z^{-1}\delta}^{L,\omega}(f) &\stackrel{5.50.b}{=} \sum_{\delta} \langle a_T, z^{-1} \rangle_L \cdot \Delta^x(\gamma, \delta) \cdot O_\delta^{L,\omega}(L_z(f)) \\ &\stackrel{\text{F.L.}}{=} \langle a_T, z^{-1} \rangle_L \cdot O_\gamma^{H,st}(b_\xi(L_z(f))) = O_\gamma^{H,st}(\langle a_T, z^{-1} \rangle_L \cdot b_\xi(L_z(f))) \\ &\stackrel{7.18}{=} O_\gamma^{H,st}(L_{z_H}(b_\xi(f))) = O_{z_H^{-1}\gamma}^{H,st}(b_\xi(f)), \end{aligned}$$

wobei bei "F.L." das fundamentale Lemma für die von G_{der} und θ' erzeugte Gruppe eingeht. \square

Präparationen für den Harish-Chandra-Abstieg

Das Ziel dieses und des nächsten Abschnitts ist das Abstiegslemma 7.32, in dem das fundamentale Lemma für beliebige Elemente auf das fundamentale Lemma für stark kompakte Elemente zurückgeführt wird. Zunächst wird nur die Situation (angenehmer?) präpariert.

(7.20) Gegeben sei ein Matching $H(F) \ni \gamma \leftrightarrow \delta \in \tilde{G}(F) \cap L$ stark reguläre Elemente und alle Bezeichnungen $(g, \delta^*, \tilde{T}, \tilde{T}_G, \dots)$ aus (5.9) werden benutzt. Sei T_{sp} der maximale F -Splittorus in T und $M^* := \text{Cent}(T_{sp}, G)^\circ$. Wie T selbst ist auch T_{sp} Θ^* -stabil. $M^{*\Theta^*}$ und M^* sind quasisplit, denn $T_{sp}^{\Theta^*}$ liegt in einem maximalen F -Splittorus T_1 von G^{Θ^*} . Offensichtlich ist $T_1 \subset M^{*\Theta^*}$ und der maximale F -Splittorus $\text{Cent}(T_1, G)$ liegt in M^* .

Behauptung 7.21. *Man darf (und wird) annehmen, daß $\mathbb{T} \subset M^*$ (d.h. $T_{sp} \subset \mathbb{T}$) und $M^* \cdot \mathbb{B}$ eine (F -rationale) parabolische Untergruppe von G ist.*

Beweis: Weil $M^{*\Theta^*} = \text{Cent}(T_{sp}^{\Theta^*}, G^{\Theta^*})$ Levigruppe einer geeigneten F -rationalen parabolischen Untergruppe von G^{Θ^*} ist, gibt es ein $x \in (G^{\Theta^*})_{sc}(F)$, so daß $xM^{*\Theta^*}x^{-1}$ Levigruppe einer Standardparabolischen bezüglich \mathbb{B}^{Θ^*} wird. Da Θ^* speziell ist, ist (nach (3.11)) das Paar (\mathbb{B}, \mathbb{T}) das einzige Paar in G , dessen Schnitt mit G^{Θ^*} das Paar $(\mathbb{B}^{\Theta^*}, \mathbb{T}^{\Theta^*})$ ergibt. Daher ist xM^*x^{-1} Levigruppe einer Standardparabolischen bezüglich \mathbb{B} .

Weil $x \in G^{\theta^*}(F)$ kann man das Matching $\gamma \leftrightarrow \delta$ führen über die Daten $x\delta^*x^{-1}$, (xBx^{-1}, xTx^{-1}) , xg und $\eta' = \text{int}x \circ \eta$ statt der bisherigen δ^* , (B, T) , g bzw. $\eta : T_H \rightarrow T_{\theta^*}$. Bezüglich dieser modifizierten Realisierung des Matchings ist die maximale Splitkomponente des neuen T in \mathbb{T} enthalten. \square

Lemma 7.22. $H^1(F, M^*) \hookrightarrow H^1(F, G)$

Beweis: [K88, S. 639] \square

Behauptung 7.23. *Die $G(F)$ -Konjugationsklasse von δ hat einen Vertreter in $(M^* \cdot \theta^*)(F)$.*

Beweis: Für die Projektion von g aus (5.9.4) nach G ist $v(\sigma) := g\sigma(g)^{-1} \in \text{Kern}[H^1(F, T) \rightarrow H^1(F, G)]$. Wegen Lemma 7.22 ist $\text{Kern}[H^1(F, T) \rightarrow H^1(F, G)] = \text{Kern}[H^1(F, T) \rightarrow H^1(F, M^*)]$. Also gibt es ein $m \in M^*$ mit $v(\sigma) = mm^{-\sigma}$, d.h. $m^{-1}g \in G(F)$ und $m^{-1}g\delta g^{-1}m = m^{-1}\delta^*m \in (M^* \cdot \theta^*) \cap \tilde{G}(F)$. \square

(7.24) Man wird daher im Matching $\gamma \leftrightarrow \delta$ das δ ersetzen durch diesen Vertreter in $(M^* \cdot \theta^*)(F)$. Nach Satz 5.50.a verändert sich dadurch $\Delta(\gamma, \star)$ zwar, aber $\Delta(\gamma, \star)O_\star(f)$ bleibt insgesamt unverändert.

Nach diesen Präparationen kann man annehmen, daß die maximalen Splittori T_{sp} und $T_{G,sp} = \text{Cent}(\text{Cent}(\delta, G), G)^\circ$ von T bzw. T_G sowie ihre Zentralisatoren $M^* = \text{Cent}(T_{sp}, G)$ bzw. $M := \text{Cent}(T_{G,sp}, G)$ übereinstimmen. Also möchte man (unter der Annahme $g \in M_{sc}$, für die man die in (7.24) benannte Veränderung von Δ in Kauf nehmen muß) auf $\tilde{M} := \text{Cent}(T_{G,sp}, \tilde{G})$ absteigen.

Das läuft ganz analog zur ungetwisteten Situation. $M = M^*$ ist quasisplit, so daß man als inneren Twist wieder die Identität benutzen darf. Wähle eine F -rationale parabolische Untergruppe P , deren Levigruppe M ist. (Nach den Manipulationen in Behauptung 7.21 sei das $P = M \cdot \mathbb{B}$.) Sei N das unipotente Radikal von P .

Lemma 7.25. *Sei G reduktiv (und zusammenhängend). Die duale Gruppe \hat{M} einer Levikomponente M einer parabolischen Untergruppe von G ist selbst Levikomponente einer parabolischen Untergruppe von \hat{G} . Genauer korrespondiert (bis auf \hat{G} -Konjugation) \hat{M} zu $I^\vee := \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta\} \subset \Delta^\vee$, wenn M zu $I \subset \Delta = \Delta(G)$ korrespondiert.*

Beweis: Klar. □

(7.26) Als nächstes wird analog zu [LS90, 1.4.] ein (unverzweigtes) endoskopisches Datum zu M und (G, H) konstruiert. Dazu mögen die Konventionen und Bezeichnungen aus (5.5) alle in Kraft sein. Nach der Definition von $M = M^*$ und Behauptung 7.21 ist $\mathbf{spl}_M := \mathbf{spl}_{G^*} \cap M$ ein F -Splitting von M . Die Identifizierung von $\Phi(G, T)^\vee$ mit $\Phi(\hat{G}, \mathcal{T})$ ermöglicht es, $\Phi(M, T)^\vee$ als Γ -stabile Teilmenge von $\Phi(\hat{G}, \mathcal{T})$ aufzufassen. O.E. sei \hat{M} die Leviuntergruppe von \hat{G} , die \mathcal{T} enthält und $\Phi(M, T)^\vee$ als Wurzeln hat. Dann kann man $\mathbf{spl}_{\hat{M}} := \mathbf{spl}_{\hat{G}} \cap \hat{M}$ definieren.

Da die Galoisaktion auf $\Phi(M)$ die Einschränkung der Γ -Aktion auf $\Phi(G)$ ist, kann man folgende L -Gruppe $(\hat{M}, \rho_M, \eta_M)$ von M in ${}^L G$ einbetten: Für ρ_M nimmt man die Einschränkung von ρ_G auf \hat{M} und für η_M die Einschränkung von η_G auf $\Psi(M)^\vee$. (Vgl. (1.10).)

Die Konstruktion bisher ergibt außerdem, daß $\Phi(M)^\vee$ und damit \hat{M} $\hat{\theta}$ -stabil ist, so daß $P_{\hat{\theta}}(\Phi(\hat{M}))$ ein abgeschlossenes Subsystem von $P_{\hat{\theta}}(\Phi(\hat{G}))$ ist (d.h. alle positiven Linearkombinationen von Elementen aus dem Subsystem, die Wurzeln sind, liegen in dem Subsystem.) Weil zudem $\mathcal{T}^{\hat{\theta}^\circ} \subset (\hat{M}^{s \cdot \hat{\theta}})^\circ$ ($s \in \mathcal{T}!$), ist $(\hat{M}^{s \cdot \hat{\theta}})^\circ$ Levikomponente einer Parabolischen von $\hat{H} = \hat{G}^{s \cdot \hat{\theta}^\circ}$: Es gilt z.B. $(\hat{M}^{s \cdot \hat{\theta}})^\circ = \text{Cent}(\hat{T}_{sp}^{\hat{\theta}^\circ}, (\hat{G}^{s \cdot \hat{\theta}})^\circ)$ (wobei $\hat{T}_{sp}^{\hat{\theta}^\circ}$ mit seinem Urbild in $\hat{T}^{\hat{\theta}^\circ} = \mathcal{T}^{\hat{\theta}^\circ}$ identifiziert wurde).

Analog sieht man mit Lemma 7.25, daß es eine Leviuntergruppe H_M von H gibt, so daß $\hat{H}_M = \hat{M}^{s \cdot \hat{\theta}^\circ}$, z.B. $H_M = \text{Cent}(H, T_{H,sp})$, wobei $T_H = \text{Cent}(\gamma, H)$ von dem Matching aus (7.20) herkommt. Sei $\mathbf{spl}_{\hat{H}_M} = \mathbf{spl}_{\hat{H}} \cap \hat{H}_M$.

Die Gruppe ${}^L H_M$ wird analog (zu ${}^L M \subset {}^L G$) durch Einschränkung der Daten zu ${}^L H$ gewonnen: ${}^L H_M := (\hat{H}_M, \rho_H|_{\hat{H}_M}, \eta_H|_{\hat{H}_M})$. Um zu sehen, daß es ein ξ_M gibt, so daß

$$(iv) \quad \begin{array}{ccc} {}^L H_M & \xrightarrow{\xi_M} & {}^L M \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^L H & \xrightarrow{\xi} & {}^L G \end{array}$$

kommutiert, beobachtet man, daß man nach Langlands 3.41 ${}^L T_H \simeq {}^L(T_{\theta^*})$ mit entsprechenden χ -Data in alle vier Gruppen einbetten kann. Das Bild unter einer solchen Einbettung hängt nicht ab von den χ -Data, da diese nur das $r_p(w) \in \hat{T}_H$ beeinflussen (bei der Definition **(vi)** in (3.47)). Wie in (5.35) ausgeführt wurde, hat man

$$\text{Bild}[{}^L T_H \hookrightarrow {}^L H_M \hookrightarrow {}^L H \xrightarrow{\xi} {}^L G] = \mathcal{T} \cdot \text{Bild}[{}^L T_H \hookrightarrow {}^L M \hookrightarrow {}^L G] \subset \text{Bild}[{}^L M \hookrightarrow {}^L G].$$

Mit der Definition von \hat{H}_M zusammen folgt, daß $\xi({}^L H_M) \subset {}^L M$.

Indem man die Borelgruppen $B \cap M \supset T$ und $B_H \cap H_M \supset T_H$ benutzt, ist die zu $\hat{T}_H \simeq \mathcal{T}_H \simeq \mathcal{T}^{\hat{\theta}^\circ} \simeq (T_{\theta^*})^\wedge$ duale Abbildung $T_H \simeq T_{\theta^*}$ eine zulässige Einbettung sowohl für (\tilde{G}, H) als auch für (\tilde{M}, H_M) .

(7.27) Als endoskopisches Datum für $(\tilde{M} := \langle M, \delta \rangle, \mathbf{a})$ nimmt man nun das Tupel

$$(H_M, {}^L H_M, s, \xi|_{{}^L H_M}).$$

Seine Isomorphieklasse (vgl. (5.3)) ist wohlbestimmt durch die Isomorphieklasse von $(H, {}^L H, s, \xi)$, denn $\text{Cent}(\hat{G}) \subset \text{Cent}(\hat{M})$. Außerdem gelten die fundamentalen Annahmen, wenn man sie wörtlich auf dieses endoskopische Datum und M überträgt. Langlands und Shelstad [LS90, 1.4] zeigen die Unabhängigkeit der Isomorphieklasse von den vielen Wahlmöglichkeiten bei der Konstruktion.

Nach [K86, 7.1] sind $M(F) \cap K$ und $H_M(F) \cap K_H$ hyperspezielle maximal kompakte Untergruppen von $M(F)$ bzw. $H_M(F)$.

Behauptung 7.28. *Die Inklusion ${}^L M \hookrightarrow {}^L G$ induziert die untere Inklusion in dem kommutativen Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(\tilde{G}, K) & \xrightarrow{(\cdot)^{(P)}} & \mathcal{H}(\tilde{M}, M(F) \cap K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}[\hat{\mathbb{T}}_{sp}^{\hat{\theta}^\circ}]^{W(\hat{G})^{\langle \text{Fr}, \hat{\theta} \rangle}} & \longrightarrow & \mathbb{C}[\hat{\mathbb{T}}_{sp}^{\hat{\theta}^\circ}]^{W(\hat{M})^{\langle \text{Fr}, \hat{\theta} \rangle}} \end{array}$$

Dabei sind die Abbildungen nach unten Sataketransformationen und

$$f^{(P)}(m) := \delta_P^{\frac{1}{2}}(m) \int_{N(F)} f(mn) dn$$

der konstante Fourierterm entlang M . Das Haarmaß auf dem unipotenten Radikal N von $P = M \cdot \mathbb{B}$ wird normiert durch $\text{vol}_{dn}(N \cap K) = 1$.

Beweis: Man rechnet mit Lemma 7.14 (für $s \in \hat{\mathbb{T}}_{sp}^{\hat{\theta}^\circ}$) nach

$$f^{\vee G}(s) = \sum_{\lambda \in X_*(\mathbb{T}_{sp}) = X_*(\hat{\mathbb{T}}_{sp})} \lambda(s) \cdot (S^G f)(\pi_F^\lambda) = \sum_{\lambda} \lambda(s) \cdot (S^M f^{(P)})(\pi_F^\lambda) = (f^{(P)})^{\vee M}(s),$$

wobei die Sataketransformationen und S wie angedeutet in den Gruppen G bzw. M gebildet werden. Dabei benutzt man die Zerlegung $du_G = du_M \cdot dn...$ \square

Angewendet auf die Paare M, G sowie H_M, H folgt hieraus nach Konstruktion von b_ξ in (7.16) das

Korollar 7.29. *Das kommutative Diagramm (iv) in (7.26) induziert das folgende kommutative Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(\tilde{G}, K) & \xrightarrow{b_\xi} & \mathcal{H}(H, K_H) \\ (\cdot)^{(P)} \downarrow & & \downarrow (\cdot)^{(P_H)} \\ \mathcal{H}(\tilde{M}, M \cap K) & \xrightarrow{b_{\xi_M}} & \mathcal{H}(H_M, H_M \cap K_H) \end{array}$$

Für die entscheidende Integralrechnung 7.31 muß noch folgende Berechnung einer Jacobideterminante bereitgestellt werden:

Lemma 7.30. *Sei $\tilde{P} = \tilde{M} \cdot N$ wie bisher in den letzten Paragraphen.*

(D.h. $P = M \cdot N$ die Levizerlegung einer Θ^ -stabilen F -Parabolischen $P \subset G$ und $\tilde{P} = \text{Norm}(P, \tilde{G})$ bzw. $\tilde{M} = \text{Norm}(M, \tilde{P})$.)*

Für fast halbeinfaches $\delta = \tilde{M}(F) \cap L$, gilt

(1) *Falls $\Delta_{HC}(\delta) := \det(1 - \text{Ad}(\delta)|_{\text{Lie}N}) \neq 0$, so gilt für alle $f \in \mathcal{C}_c(L(F))$*

$$\int_N f(\delta n) dn = |\Delta_{HC}(\delta^{-1})|_F \int_N f(n^{-1} \delta n) dn.$$

(2) $D_{G/M}(\delta) \stackrel{\text{Def}}{=} |\det(1 - \text{Ad}(\delta))|_{\text{Lie}G/M}|_F^{1/2} = |\Delta_{HC}(\delta^{-1})|_F \cdot \delta_P(\delta)^{1/2}.$

(3) $D_{G/M}(m^{-1} \delta m) = D_{G/M}(\delta) = D_{G/M}(\delta^{-1})$ für alle $m \in M(F).$

(4) *Es stabilisiere $\theta^* \in \tilde{P} \cap L$ ein Splitting $(\mathbb{B}, \mathbb{T}, \{X_\alpha\})$ von G mit $\mathbb{B} \subset P$ und $\mathbb{T} \subset M$. Zerlege $\delta = t \cdot \theta^*$ (mit $t \in \mathbb{T}$). Dann gilt (mit $I = \langle \theta^* \rangle$)*

$$D_{G/M}(\delta) = \prod_{\substack{I\alpha \subset \Phi(G) \setminus \Phi(M) \\ \alpha \text{ vom Typ I, II}}} |S_{I\alpha}(t) - 1|_F^{1/2} \cdot \prod_{\substack{I\alpha \subset \Phi(G) \setminus \Phi(M) \\ \alpha \text{ vom Typ III}}} |S_{I\alpha}(t) + 1|_F^{1/2}$$

Beweis: Der Beweis von [HC70, Lemma 22] überträgt sich wörtlich auf den Fall eines fast halbeinfachen $\delta \in \tilde{P}(F) \cap L$, denn weil δ ein Paar (B, T) mit $P \supset B$ und $T \subset M$ stabilisiert, gibt es auch hier eine Filtrierung δ -stabiler Untergruppen $N = N_1 \supset N_2 \supset \dots \supset N_{r+1} = 1$ mit abelschen Quotienten N_i/N_{i+1} und $[N_i, N_i] \subset N_{i+1}$. (Man kann z.B. für jedes N_i das Erzeugnis aller U_α nehmen, so daß die Höhe von α bzgl. $\Delta(B, T)$ unter einer gewissen Schranke bleibt. Natürlich sinkt die Schranke, wenn i steigt.)

$$\begin{aligned} \int_{N_i} f(\delta^{-1} n^{-1} \delta n) dn &= \int_{N_{i+1} \setminus N_i} \int_{N_{i+1}} \underbrace{f(\delta^{-1} \dot{n}_i^{-1} \delta (\delta^{-1} n_{i+1}^{-1} \delta n_{i+1}) \dot{n}_i)}_{=: g_1(\delta^{-1} n_{i+1}^{-1} \delta n_{i+1})} dn_{i+1} d\dot{n}_i \\ &= |\det(1 - \text{Ad}(\delta^{-1})|_{\mathfrak{n}_{i+1}})|_F^{-1} \int_{N_{i+1} \setminus N_i} \int_{N_{i+1}} \underbrace{f(\delta^{-1} \dot{n}_i^{-1} \delta \dot{n}_i \dot{n}_i^{-1} n_{i+1} \dot{n}_i)}_{=: g_1(n_{i+1})} dn_{i+1} d\dot{n}_i \end{aligned}$$

nach Induktionsannahme. Substituiere $\dot{n}_i^{-1}n_{i+1}\dot{n}_i \mapsto n_{i+1}$. Die Funktion g_2 ist eine Funktion der abelschen Gruppe $N_{i+1} \backslash N_i$

$$\begin{aligned}
&= |\det(1 - \text{Ad}(\delta^{-1})|_{\mathfrak{n}_{i+1}})|_F^{-1} \int_{N_{i+1} \backslash N_i} \underbrace{\int_{N_{i+1}} f(\delta^{-1}\dot{n}_i^{-1}\delta\dot{n}_in_{i+1})dn_{i+1}}_{=:g_2(\delta^{-1}\dot{n}_i^{-1}\delta\dot{n}_i)} d\dot{n}_i \\
&= |\det(1 - \text{Ad}(\delta^{-1})|_{\mathfrak{n}_{i+1} \oplus (\mathfrak{n}_i/\mathfrak{n}_{i+1})})|_F^{-1} \int_{N_{i+1} \backslash N_i} \underbrace{\int_{N_{i+1}} f(\dot{n}_in_{i+1})dn_{i+1}}_{g_2(\dot{n}_i)} d\dot{n}_i \\
&= |\det(1 - \text{Ad}(\delta^{-1})|_{\mathfrak{n}_i})|_F^{-1} \int_{N_i} f(n_i)dn_i
\end{aligned}$$

Die restlichen Aussagen erhält man mit der Zerlegung $\text{Lie}(G) = \mathfrak{n}^- \oplus \text{Lie}(M) \oplus \mathfrak{n}$.

$$\begin{aligned}
D_{G/M}(\delta) &= |\det(1 - \text{Ad}(\delta)|_{\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{n}})|_F^{\frac{1}{2}} \\
&= |\det(1 - \text{Ad}(\delta^{-1})|_{\mathfrak{n}})|_F^{\frac{1}{2}} \cdot |\det(\text{Ad}(\delta)|_{\mathfrak{n}}(\text{Ad}\delta^{-1} - 1)|_{\mathfrak{n}})|_F^{\frac{1}{2}} \\
&= |\det(1 - \text{Ad}(\delta^{-1})|_{\mathfrak{n}})|_F \cdot |\det(\text{Ad}(\delta)|_{\mathfrak{n}})|_F^{\frac{1}{2}} \\
&= |\Delta_{HC}(\delta^{-1})|_F \cdot \delta_P(\delta)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Für die letzte Formel kann man sich auf einen Orbit $\mathfrak{n}_{I\alpha} = \bigoplus_{\gamma \in I\alpha} \mathfrak{g}_\gamma \subset \mathfrak{n}$ beschränken. Falls α nicht vom Typ III ist, kann man nach Lemma 2.9 eine Θ^* -stabile Basis von $\mathfrak{n}_{I\alpha}$ wählen. Sei $l_\alpha := |I\alpha|$. Falls α vom Typ III ist, gibt es nach 2.9 eine Basis von $\mathfrak{n}_{I\alpha}$, so daß $I/\langle \Theta^{*l_\alpha/2} \rangle$ einfach transitiv auf den durch diese Basis erzeugten Geraden in $\mathfrak{n}_{I\alpha}$ operiert. Dann hat man $\Theta^{*l_\alpha/2}|_{\mathfrak{n}_{I\alpha}} = -1$. Insgesamt folgt daraus:

$$\det(1 - \text{Ad}(\delta))|_{\mathfrak{n}_{I\alpha}} = \begin{cases} 1 - S_{I\alpha}(t) & \text{falls } \alpha \text{ vom Typ I oder II ist} \\ 1 + S_{I\alpha}(t) & \text{falls } \alpha \text{ vom Typ III ist.} \end{cases} \quad \square$$

Harish-Chandra-Abstieg

Behauptung 7.31. $O_\delta^{L,\omega}(f) = D_{G/M}(\delta)^{-1} \cdot O_\delta^{\tilde{M} \cap L, \omega}(f^{(P)})$ für $f \in \mathcal{H}(L, K)$.

Beweis: Sei $T = \text{Cent}(\delta, G) = \text{Cent}(\delta, M)$.

$$\begin{aligned}
O_\delta^{L,\omega}(f) &= \int_{T(F) \backslash G(F)} \omega(g) f(g^{-1}\delta g) d\bar{g} \\
&= \int_{T \backslash M} \int_N \int_K \omega(mnk) f(k^{-1}n^{-1}m^{-1}\delta mnk) dk \, dn \, d\bar{m}
\end{aligned}$$

Weil ω unverzweigt ist,

$$= \int_{T \backslash M} \int_N \omega(m) f(n^{-1} \underbrace{m^{-1}\delta m}_{=:m_0} n) dn \, d\bar{n}$$

Nach Behauptung 7.30.1 gilt

$$= \int_{T \setminus M} D_{G/M}(m_0)^{-1} \cdot \delta_P(m_0)^{1/2} \cdot \omega(m) \int_N f(m_0 n) dn d\bar{m}$$

und wegen $D_{G/M}(m_0) = D_{G/M}(m^{-1}\delta m) = D_{G/M}(\delta)$

$$= D_{G/M}(\delta)^{-1} \int_{T \setminus M} \omega(m) f^{(P)}(m^{-1}\delta m) dn d\bar{m} \quad \square$$

Als Spezialfall ($\theta = id$) ergibt sich $O_\gamma^H(f^H) = D_{H/H_M}(\gamma)^{-1} \cdot O_\gamma^{H_M}((f^H)^{(P_H)})$.

Satz 7.32. *Das fundamentale Lemma 7.17 gilt, wenn es für stark kompakte Elemente gilt.*

Beweis: Sei $\gamma \in H(F)$ stark G -regulär und Norm-Image eines Elements $\delta \in L(F)$. Ferner sei M wie oben (als Zentralisator des maximalen Splittorus in $T = \text{Cent}(G, \delta^*)^\circ$) gebildet. Nach den Behauptungen 7.23 und 6.2 kann man annehmen, daß die Vertreter der $G(F)$ -Konjugationsklassen in der stabilen Konjugationsklasse von δ in $\tilde{M}(F)$ liegen und dort stark kompakt sind. Mit dem folgenden Lemma 7.33, das die Transferfaktoren bzgl. M und G vergleicht, kann man wie in [Hal93, 12.] das fundamentale Lemma für G bei γ beweisen:

$$\begin{aligned} \sum_\delta \Delta^{G,K}(\gamma, \delta) \cdot O_\delta^G(f) &\stackrel{7.31+7.33}{=} D_{H/H_M}(\gamma)^{-1} \cdot \sum_\delta \Delta^{M, K \cap M(F)}(\gamma, \delta) \cdot O_\delta^M(f^{(P)}) \\ &\stackrel{\text{F.L.}}{=} D_{H/H_M}(\gamma)^{-1} \cdot O_\gamma^{st, H_M}(b_{\xi_M}(f^{(P)})) \\ &\stackrel{7.29}{=} D_{H/H_M}(\gamma)^{-1} \cdot O_\gamma^{st, H_M}((b_\xi(f))^{(P_H)}) \\ &\stackrel{7.31}{=} O_\gamma^{st, H}(b_\xi(f)), \end{aligned}$$

wobei bei F.L. das fundamentale Lemma für (γ, M, H_M, \dots) eingeht. \square

Lemma 7.33. $\Delta^{G,K}(\gamma, \delta) = \Delta^{M, K \cap M(F)}(\gamma, \delta) \cdot \frac{D_{G/M}(\delta)}{D_{H/H_M}(\gamma)}$.

Beweis: Man wähle für M und G dieselben a -Data und χ -Data und alle a -Data und χ -Data trivial auf $\Phi(G) \setminus \Phi(M) = \pm \Phi(N)$ (denn diese zerfallen offenbar in asymmetrische Galoisorbits). Damit hat man $\Delta_{\text{II}}^M = \Delta_{\text{II}}^G$ und $\Delta_{\text{I}}^M = \Delta_{\text{I}}^G$, denn man kann $\lambda_{\{a_\alpha\}}^G(T_{sc}^{\Theta^* \circ}) = \lambda_{\{a_\alpha\}}^M(T_{sc}^{\Theta^* \circ})$ erreichen, wenn man $h \in M_{sc}$ wählt. Die Steinbergepräsentanten werden onehin zu $\mathbf{spl}_M = \mathbf{spl}_B \cap G$ gebildet und auf der dualen Seite hat man $\mathbf{s}_{T, \theta}^G = \mathbf{s}_{T, \theta}^M$ wegen ${}^L M \hookrightarrow {}^L G$.

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{IV}}^G(\gamma, \delta) &= \frac{|\det(1 - \text{Ad}(t^*)\theta^*)|_{\text{Lie}(G)/\text{Lie}(T)}|_F^{1/2}}{|\det(1 - \text{Ad}(\gamma))|_{\text{Lie}(H)/\text{Lie}(T_H)}|_F^{1/2}} \\ &= \Delta_{\text{IV}}^M(\gamma, \delta) \cdot \frac{|\det(1 - \text{Ad}(t^*)\theta^*)|_{\text{Lie}(N)+\text{Lie}(\tilde{N})}|_F^{1/2}}{|\det(1 - \text{Ad}(\gamma))|_{\text{Lie}(N_H)+\text{Lie}(\tilde{N}_H)}|_F^{1/2}} \\ &= \Delta_{\text{IV}}^M(\gamma, \delta) \cdot \frac{D_{G/M}(\delta)}{D_{H/H_M}(\gamma)} \end{aligned}$$

Nun zu Δ_{III} : Die normierten Referenzdaten $\bar{\gamma} \leftrightarrow \bar{\delta} \in \tilde{M}(F)$, $\{\bar{\chi}_\alpha\}$ erfüllen auch für \tilde{G} die Normierung 5.43. Weil man nach den Präparationen (7.20)–(7.27) für $\gamma \leftrightarrow \delta$ das g aus (5.9.4) in M_{sc} wählen kann, ist $V(\sigma) = ((g\sigma(g)^{-1}, \bar{v}(\sigma), (t^*, \bar{t}^{*-1})))$ o.E. dasselbe für die Berechnung von Δ_{III}^G wie auch für Δ_{III}^M .

Man hat das kommutative Diagramm (iv) in (7.26) und aus der Gleichwahl der χ -Data folgt, daß ξ_{T_H} und ξ_T über die Inklusion ${}^L M \hookrightarrow {}^L G$ faktorisieren, d.h.

$$\begin{array}{ccc} {}^L T_H & \xrightarrow{\xi_{T_H}} & {}^L G \\ & \searrow & \uparrow \\ & & {}^L M \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} {}^L T & \xrightarrow{\xi_T} & {}^L G \\ & \searrow & \uparrow \\ & & {}^L M. \end{array}$$

sind kommutativ. Daher ist $A(w)$ ebenfalls in den Paarungen für beide Gruppen dasselbe, mithin $\Delta_{\text{III}}^G = \Delta_{\text{III}}^M$. \square

8 Δ für unverzweigte anisotrope Tori

(8.1) In diesem Kapitel ist G halbeinfach unverzweigt (und zusammenhängend) und $\tilde{G}/G \simeq \mathbb{Z}/l$. Die Annahmen (5.17) gelten weiterhin. Insbesondere zerfällt G über der endlichen unverzweigten Erweiterung F'/F . In (4.24) wurde eine Kohomologieklassse $\gamma(L)$ eingeführt, die das Hindernis beschreibt, ob $L(F)$ leer ist. Ihr Bild unter der Einbettung $\text{Cent}(G)_{\theta^*} \hookrightarrow \text{Cent}(H)$ (aus 5.6) ist die Klasse $\gamma_H(L) \in H^1(F, \text{Cent}(H))$. Diese Klasse hängt nur von L und H ab und ist nach den fundamentalen Annahmen unverzweigt; genauer Inflation aus $H^1(F'/F, \text{Cent}(H)(F'))$. **Wähle** und fixiere im Folgenden einen Zykel $z_H^*(\sigma)$ in $\gamma_H(L)$.

Lemma 8.2. *Sei T_H ein maximaler F -Torus von H und \tilde{T}_G ein maximaler F -Torus bezüglich L . Beide Tori sollen über der endlichen unverzweigten Erweiterung F'/F zerfallen. Sei $U_{\tilde{T}} \subset \tilde{T}_G(F)$ eine maximal kompakte Untergruppe.*

Wenn es ein Matching $\gamma_0 \leftrightarrow \delta_0$ stark regulärer, stark kompakter Elemente $\delta_0 \in U_{\tilde{T}}$, $\gamma_0 \in T_H(\bar{F})$ mit $z_H^(\sigma) = \gamma_0^{-1}\sigma(\gamma_0)$ gibt, dann ist jedes stark reguläre, stark kompakte $\gamma \in T_H(\bar{F})$, für das $\gamma^{-1}\sigma(\gamma) = z_H^*(\sigma)$ gilt, Norm-Image eines Elements δ aus $U_{\tilde{T}} \cap L$. Zudem kann man das Matching $\gamma \leftrightarrow \delta$ noch so führen, daß dasselbe g (aus (5.9.4)) benutzt wird wie für $\gamma_0 \leftrightarrow \delta_0$.*

Beweis: Die Bezeichnungen für das vorgegebene Matching $\gamma_0 \leftrightarrow \delta_0$ seien die üblichen:

$$\begin{array}{ccccccc} T_H & \xrightarrow{\eta} & T_{\theta^*} & \xleftarrow{P_{\theta^*}} & T & \xleftarrow{x \mapsto x\theta^{*-1}} & \tilde{T} \cap L \xleftarrow{\text{int } g_0} \tilde{T}_G \cap L \\ \gamma_0 & \longmapsto & \bullet & \longleftarrow & t_0^* & \longleftarrow & \delta_0^* \longleftarrow \delta_0 \end{array}$$

Nach (5.12) darf man $g_0 \in G_{sc}(F')$ annehmen. (Weil $\theta^* \in \tilde{G}(F')$, ist somit $t_0^* \in T(F')$.) Der Kern der vom Ordnungshomomorphismus ν induzierten Abbildung

$$H^1(F'/F, (1 - \theta^*)T) \longrightarrow H^1(F'/F, (1 - \theta^*)V \cap X_*(T))$$

ist Quotient von $H^1(F'/F, ((1 - \theta^*)T)(F')_c) = 1$ (nach 3.39). Also hat man in folgendem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen rechts eine Inklusion ($\Lambda := X_*(T) \cap (1 - \theta^*)V$)

$$\begin{array}{ccccccc} ((1 - \theta^*)T)(F) & \longrightarrow & T(F) & \xrightarrow{P_{\theta^*}} & T_{\theta^*}(F) & \longrightarrow & H^1(F'/F, (1 - \theta^*)T) \\ \nu \downarrow & & \nu \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda^\Gamma & \longrightarrow & X_*(T)^\Gamma & \longrightarrow & (X_*(T)/\Lambda)^\Gamma & \longrightarrow & H^1(F'/F, \Lambda) \end{array}$$

Die Surjektion links außen wurde in Lemma 4.34.a bewiesen. Also hat $\eta(\gamma\gamma_0^{-1}) \in T_{\theta^*}(F)_c$ ein Urbild $t \in T(F)_c$ unter P_{θ^*} . Weil $\text{int } g_0 : T_G \rightarrow T$ über F definiert ist (auf den Einskomponenten), liegt $\delta := g_0^{-1}t\delta_0^*g_0 = g_0^{-1}tg_0\delta_0 \in \tilde{T}(F)$. Offensichtlich hat man ein Matching $\gamma \leftrightarrow \delta$ mit denselben Größen θ^* , η , \tilde{T} , g_0 wie bei $\gamma_0 \leftrightarrow \delta_0$. \square

Behauptung 8.3. *Sei $\theta^* \in L(F')$, so daß $\Theta^* = \text{int}\theta^*$ ein F -Splitting stabilisiert. (Solche Elemente existieren, nach der fundamentalen Annahme (5.17.3))*

Sei $\tilde{T}_G \subset \tilde{G}$ ein anisotroper maximaler Torus bzgl. L , der über F' zerfällt und $\delta \in \tilde{T}_G(F) \cap L$ ein stark reguläres, (automatisch) stark kompaktes Element, das an einem Matching $\gamma \leftrightarrow \delta$ beteiligt ist. Dann gibt ein stark kompaktes $\delta' \in \tilde{T}(F)$, das $G(F')$ -konjugiert zu δ ist und ebenfalls γ zum Norm-Image hat.

Beweis: Der vermittelnde Torus \tilde{T} des Matchings ist anisotrop, weil $\text{int}g : \text{Cent}(\tilde{T}_G) \simeq \text{Cent}(\tilde{T})$ über F definiert ist (Nach Definition 5.9.7 ist $g\sigma(g)^{-1} \in T_{sc}$.) Sei N_l die Normabbildung auf $X_*(T)$ aus Definition 4.31 und ν die Ordnungsabbildung auf $T(F')$. Weil $z^*(\sigma) := \theta^*\sigma(\theta^*)^{-1} \in \text{Cent}(G)(F')$ stark kompakt ist, folgt für alle $\sigma \in \text{Gal}(F'/F) =: \Gamma$

$$\begin{aligned} \delta^*\sigma(\delta^*)^{-1} &= z^*(\sigma)t^*\sigma(t^*)^{-1} = (1 - \theta^*)(g\sigma(g)^{-1}) \in \left((1 - \theta^*)T\right)(F') \\ &\implies N_l(\nu(t^*)) \in (X_*(T)^{\theta^*})^\Gamma = 0 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt, weil \tilde{T} anisotrop ist. Also hat man $\nu(t^*) \in (1 - \theta^*)V \cap X_*(T)$. (Da nach Voraussetzung θ^* und g F' -rational sind, ist $t^* \in T(F')$!) Sei $\pi \in \mathcal{O}_F$ ein Primelement und $t_1 := \nu(t^*) \otimes \pi^{-1} \in ((1 - \theta^*)V \cap X_*(T')) \otimes F' = ((1 - \theta^*)T')(F')$. Dann ist $t_1 t^* \in T(F')_c$. Weil $H^1(\Gamma, ((1 - \theta^*)T)(F')_c) = 1$ (nach 3.39), gibt es ein $t_2 \in ((1 - \theta^*)T)(F')_c$, so daß $\delta' := t_1 t_2 \delta^* = t_2 (t_1 t^*) \theta^* \in \tilde{T}(F)$ stark kompakt ist. Dieses δ' hat γ zum Norm-Image, denn $t_1 t_2 \in (1 - \theta^*)T$. \square

Mit Korollar 5.16 folgen daraus

Korollar 8.4. *Sei $\tilde{T}_G \subset \tilde{G}$ ein anisotroper Torus, der über F' zerfällt, und $U \subset \tilde{T}_G(F)$ eine maximal kompakte Untergruppe, so daß ein z_H^* -Matching $\gamma \leftrightarrow \delta \in U$ existiert. Ferner stabilisiere $\Theta^* \in \text{Aut}(G)$ ein F -Splitting.*

Dann gibt es in der halbstabilen $G(F')$ -Konjugationsklasse von U eine Gruppe $U_{\tilde{T}}$, so daß erstens der zu $U_{\tilde{T}}$ gehörende Torus $\tilde{T} := \text{Cent}(\text{Cent}(U_{\tilde{T}}), \tilde{G})$ Θ^ -stabil ist und zweitens γ Norm-Image eines Elements aus $U_{\tilde{T}}$ ist.*

Korollar 8.5. *Falls also \tilde{T}_G ein anisotroper, unverzweigter maximaler Torus ist, der erstens ein $\theta^* \in \tilde{T}_G(F^{\text{unv}})$ enthält, das ein F -Splitting stabilisiert, und zweitens ein $\delta \in \tilde{T}_G(F)$, das an einem Matching $\gamma \leftrightarrow \delta^* \in \tilde{T}(\bar{F}) \leftrightarrow \delta$ beteiligt ist, dann kann man bei dem Matching immer $\tilde{T}_G = \tilde{T}$ annehmen (oder gleichbedeutend $g = 1$). Mit anderen Worten: Dann gibt es eine zulässige Einbettung $T_H \xrightarrow{\sim} (T_G)_{\theta^*}$.*

Satz 8.6. *Sei $\tilde{T}_G, U \subset \tilde{T}_G(F)$ und $\gamma \leftrightarrow \delta \in U$ wie in 8.4.*

Dann gibt es in der halbstabilen $G(F')$ -Konjugationsklasse von $U_{\tilde{T}}$ eine maximal kompakte Untergruppe $U_{\tilde{T}'} \subset \tilde{T}'(F)$, so daß der Fixpunkt $x(U_{\tilde{T}'}) =: x$ aus (4.45) eine hyperspezielle Ecke im Gebäude $\mathcal{B}(G, F)$ ist.

Wenn ein $\theta^ \in L(F')$ vorgegeben ist, für das $\Theta^* := \text{int}\theta^*$ ein F -Splitting stabilisiert, dann kann man zudem $\theta^* \in \tilde{T}'(F')_x$ erreichen.*

Beweis: Sei $\theta^* \in L(F)$, so daß $\Theta^* := \text{int}\theta^*$ das F -Splitting $(\mathbb{B}, \mathbb{T}, \cdot)$ stabilisiert, $\tilde{\mathbb{T}} := \text{Cent}(\mathbb{T}^{\Theta^*}, \tilde{G})$ und \tilde{T} der Θ^* -stabile Torus über den (wie in Definition 5.9) das Matching $\gamma \leftrightarrow \delta$ geführt wird. Indem man \tilde{T}_G bzw. U innerhalb seiner halb-stabilen Konjugationsklasse geeignet abändert, darf man nach 8.3 (und Korollar 5.16) $\tilde{T}_G = \tilde{T}$ annehmen (in der Behauptung des Satzes oben).

In (3.23) und (3.24) wurden die schwach stabilen bzw. halb-stabilen $G(F')$ -Konjugationsklassen in der $G(F')$ -Konjugationsklasse von $\tilde{\mathbb{T}}$ durch $H^1(F'/F, W(\mathbb{T})^{\Theta^*})$ parametrisiert und $H^1(\Gamma_{T_G}, (1 - \Theta^*)\mathbb{T}(F'))$, wobei Γ_{T_G} die von T_G auf \mathbb{T} übertragene Galoisaktion von $\text{Gal}(F'/F)$ ist. Weil \tilde{T}_G nun Θ^* -stabil angenommen wird, sind $\text{Cent}(\tilde{T}_G)^\circ$ und $\text{Cent}(\tilde{\mathbb{T}})^\circ$ konjugiert in $G^{\Theta^*\circ}(F')$. Daher ist ein Torus der Form $\tilde{T}' := g\tilde{\mathbb{T}}g^{-1}$ (mit $g \in G(F')$) genau dann halb-stabil $G(F')$ -konjugiert zu \tilde{T}_G , wenn

(1) $g^{-1}\sigma(g) \in \text{Norm}(\tilde{\mathbb{T}}, G) = \mathbb{T} \cdot \text{Norm}(\mathbb{T}^{\Theta^*\circ}, G^{\Theta^*\circ})$ für alle $\sigma \in \text{Gal}(F'/F)$.

(2) $(1 - \Theta^*)(g^{-1}\sigma(g))$ wird trivial in $H^1(\Gamma_{T_G}, (1 - \Theta^*)\mathbb{T}(F'))$.

(3) $\tilde{T}' \stackrel{\text{Def.}}{=} g\tilde{\mathbb{T}}g^{-1}$ und \tilde{T} sind schwach stabil konjugiert.

Sei x ein θ^* -stabiler hyperspezieller Punkt aus dem Apartment $A(G, \mathbb{T}_{sp}, F) \subset \mathcal{B}(G, F)$. Nach Satz 4.44 gibt es ein $g \in G(F')^{\Theta^*\circ}$, so daß die Punkte (1), (2), (3) erfüllt sind. Weil $\theta^* \in \tilde{T}'(F')_x$, kann man mit $H^1(F'/F, T'(F')_x) = 1$ schließen, daß $\emptyset \neq \tilde{T}'(F)_x \cap L \ni \vartheta$. Daher fixiert die maximal kompakte Untergruppe $U_{\tilde{T}'} = \langle T'(F)_c, \vartheta \rangle = \tilde{T}'(F)_x \subset \tilde{T}'(F)$ den Punkt x . Nach Behauptung 5.15 gibt es in $\tilde{T}'(F) \cap L$ ein δ' , das γ zum Norm-Image hat. (Wie alle Elemente in $\tilde{T}'(F) \cap L$ ist δ' stark kompakt.) Nach Korollar 8.5 gibt es eine zulässige Einbettung $\eta' : T_H \xrightarrow{\sim} T_{\theta^*}$. Also ist $\vartheta \in \tilde{T}'(F)$ an irgendeinem Matching beteiligt. Nach Lemma 8.2 ist daher auch $\gamma \in T_H$ Norm-Image eines geeigneten $\delta'' \in U_{\tilde{T}'}$. Also sind $U_{\tilde{T}}$ und $U_{\tilde{T}'}$ halb-satbil $G(F')$ -konjugiert (nach Korollar 5.16). \square

Definition 8.7. *Sei*

- F'/F eine (genügend große) unverzweigte endliche Körpererweiterung und $\text{Gal}(F'/F) =: \Gamma$.
- $\tilde{T} \subset \tilde{G}$ ein unverzweigter, anisotroper F -Torus, maximal bzgl. L und über F' zerfallend. Seine Einskomponente sei T .
- U eine maximal kompakte Untergruppe von $\tilde{T}(G)$ mit $U \cap L \neq \emptyset$. Der Fixpunkt $x(U) \in \mathcal{B}(G, F)$ aus 4.45 sei hyperspeziell (in $\mathcal{B}(G, F)$). Außerdem soll es in U ein stark reguläres Element δ_0 geben, das an einem Matching beteiligt ist.
- $\text{spl}_G(x(U))$ ein Splitting zum Fixpunkt $x(U)$, wie in Definition 4.14 beschrieben.
- $\theta^* \in \tilde{T}(F')$ ein Vertreter für die gesternte Aktion Θ^* von L bzgl. $\text{spl}_G(x(U))$, so daß $z_H^*(\sigma)$ das Bild von $z^*(\sigma) := \theta^*\sigma(\theta^*)^{-1}$ ist unter der kanonischen Abbildung $\text{Cent}(G) \twoheadrightarrow \text{Cent}(G)_{\theta^*} \hookrightarrow \text{Cent}(H)$ aus (5.6). Sei $I := \langle \theta^* \rangle$.
- q_α (für $\alpha \in \Phi_I = P_I(\Phi(T, G))$) die Größe des Restklassenkörpers von F_α , dem Fixkörper des Stabilisators Γ_α von α bei der Operation von Γ auf Φ_I . (D.h. $q_\alpha = q^{|\Gamma \cdot \alpha|}$ mit $q = |\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}_F|$.)

- $\varepsilon(\alpha)$ die Vorzeichenfunktion auf $\Phi = \Phi(T, G)$: $\varepsilon(\alpha) = -1$, falls α vom Typ III ist, und sonst gilt $\varepsilon(\alpha) = 1$.
- $P_{\theta^*} : T \rightarrow T_{\theta^*}$ ist die Projektion auf die Koinvarianten des Torus. Die analoge Projektion $P_I : \Phi \rightarrow \Phi_I$ auf Vektorraumniveau und die Orbitsumme $S_{I\alpha} = \sum_{\gamma \in I\alpha} \gamma$ wurden in 2.3 definiert.

Definiere für alle stark regulären Elemente $\delta =: t^* \cdot \theta^* \in \tilde{T} \cap L$ mit $P_{\theta^*}(t^*) \in T_{ad, \theta^*}(F)$

$$\Delta^U(\delta) := \prod_{\substack{\mathcal{O} \text{ ist } \Gamma\text{-Orbit in } \Phi_I \\ (\text{und } P_I(\alpha) \in \mathcal{O} \text{ ein Vertreter.})}} \left(-q_{P_I(\alpha)}^{-\frac{1}{2}} \right)^{\text{val}_F(\varepsilon(\alpha) \cdot S_{I\alpha}(t^*) - 1)},$$

wobei das Produkt über alle Galoisorbits \mathcal{O} in Φ_I läuft und die $\alpha \in \Phi$ so zu wählen sind, daß $P_I(\alpha) \in \Phi_I$ ein Vertretersystem für die Galoisorbits \mathcal{O} durchläuft.

(8.8) Wohldefiniertheit von Δ^U : Klar ist, daß weder $q_{P_I(\alpha)}$ noch ε von der Wahl des Vertreters $\alpha \in \Phi$ abhängen, für das $P_I(\alpha)$ in einem vorgegebenen Galoisorbit \mathcal{O} liegt. Weil δ und Θ^* F -rational sind, ist auch $S_{I\alpha}(t^*) = \prod_{\gamma \in I\alpha} \gamma(t^*) \in F^\times$ unabhängig von der Wahl der α . Die Wahl des unverzweigten Zerfällungskörpers ist offenbar unerheblich und \tilde{T} , T , P_{θ^*} werden gar nicht gewählt: Weil δ stark regulär ist, ist $\tilde{T} = \text{Cent}(G^\delta, \tilde{G})$ durch δ eindeutig bestimmt. (Vgl. 3.2 und 3.4.) Ebenso ist die Operation von Θ^* auf T durch δ festgelegt.

(8.9) Nach den Aussagen 8.4 bis 8.6 gibt es in jeder halbstabilen $G(F')$ -Konjugationsklasse eines unverzweigten, anisotropen, F -Torus, der maximal bzgl. L ist und an einem Matching beteiligte Elemente enthält, einen Torus \tilde{T} , der den Anforderungen von Definition 8.7 genügt.

Satz 8.10. Seien \tilde{T} und $U_{\tilde{T}} \subset \tilde{T}(F)$ wie in Definition 8.7. Ferner sei T_H ein F -rationaler maximaler Torus von H , so daß ein Matching $T_H(F) \ni \gamma_0 \leftrightarrow \delta_0 \in U_{\tilde{T}} \cap L$ existiert. Dann gilt für alle stark kompakten, stark regulären $\gamma \in T_H(\bar{F})$ mit $\gamma^{-1}\sigma(\gamma) = z_H^*(\sigma)$

$$\Delta^{x(U_{\tilde{T}})}(\gamma, \delta) = \Delta^{U_{\tilde{T}}}(\delta) / \Delta^{T_H(F)}(\gamma),$$

wobei $\delta \in U_{\tilde{T}}$, so daß $\gamma \leftrightarrow \delta$ matchen. (Solche δ existieren nach Lemma 8.2.)

Beweis: Sei F' wie stets ein genügend großer unverzweigter Zerfällungskörper von \tilde{T} und $K' = G(F')_{x(U_{\tilde{T}})}$. Nach Satz 4.5 und Satz 4.21 gibt es zu $x := x(U_{\tilde{T}})$ zwei \mathcal{O}_F -Gruppenschemata \mathcal{F} und \mathcal{G} , deren generische Fasern $G_{sc}^{\Theta^*}$ bzw. G sind und für die gilt $\mathcal{F}(\mathcal{O}_{F'}) = G_{sc}^{\Theta^*}(F')_{i_{\Theta^*}^{-1}(x)} \subset G(F')_x = \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F'})$. Folgende Wahlen sind möglich, weil \tilde{T} unverzweigt ist und x hyperspeziell im Gebäude $\mathcal{B}(G, F)^{\Theta^*} \stackrel{4.21}{=} \mathcal{B}(G_{sc}^{\Theta^*}, F)$:

- $\chi_\alpha = (-1)^{\text{val}_F(x)}$ für alle $x \in F^{unv}$ und alle $\alpha \in \Phi(H)$ bzw. in $P_I(\Phi(G))$.
- Alle a -Data sind Einheiten, d.h. aus $\mathcal{O}_{F'}^\times$.
- Das durch das Θ^* -invariante Referenz-Splitting $\mathbf{spl}_G = (\mathbb{B}, \mathbb{T}, \{X_\alpha\})$ definierte Splitting $\mathbf{spl}_{G_{sc}^{\Theta^*}} = (\mathbb{B}_{sc}^{\Theta^*}, \mathbb{T}_{sc}^{\Theta^*}, \{\sum_{\gamma \in I_\alpha} X_\gamma\})$ ist geliftet bezüglich $i_\Theta^{-1}(x) \in \mathcal{B}(G_{sc}^{\Theta^*}, F)$. (Vgl. Definition 4.14 und Behauptung 5.28.) (D.h. die Reduktion von $\mathbf{spl}_{G_{sc}^{\Theta^*}} \bmod \mathfrak{p}$ ergibt ein Splitting der speziellen Faser des \mathcal{O}_F -Gruppenschemas \mathcal{F} .)

Zuerst werden die Faktoren Δ_{II} und Δ_{IV} behandelt, die bereits als Quotient eines G -Beitrages im Zähler und eines H -Beitrags im Nenner definiert wurden (in (5.24) bzw. (5.23)).

Beitrag von Δ_{II} : Nach Wahl der χ - und a -Data oben hat man für den Zähler

$$\begin{aligned} & \prod_{\substack{\Gamma \cdot P_I(\alpha), \\ \alpha \text{ nicht vom} \\ \text{Typ III}}} \chi_{P_I(\alpha)} \left(\frac{S_{I_\alpha}(t^*) - 1}{a_{P_I(\alpha)}} \right) \cdot \prod_{\substack{\Gamma \cdot P_I(\alpha), \\ \alpha \text{ vom Typ III}}} \chi_{P_I(\alpha)} (S_{I_\alpha}(t^*) + 1) \\ &= \prod_{\substack{\Gamma \cdot P_I(\alpha), \\ P_I(\alpha) \in \Phi(G^\theta)}} (-1)^{\text{val}_F(S_{I_\alpha}(t^*) - 1)} \cdot \prod_{\substack{\Gamma \cdot P_I(\alpha), \\ P_I(\alpha) \notin \Phi(G^\theta)}} (-1)^{\text{val}_F(S_{I_\alpha}(t^*) + 1)} \end{aligned}$$

und eine analoge Rechnung für den Beitrag von H im Nenner.

Beitrag von Δ_{IV} : Nach 7.30.4 gilt für den G -Beitrag im Zähler

$$\begin{aligned} D_{G/T}(\delta^*) &= \prod_{P_I(\alpha) \in P_I(\Phi(G))} |\varepsilon(\alpha) \cdot S_{I_\alpha}(t^*) - 1|_F^{\frac{1}{2}} \\ &= \prod_{\substack{\Gamma \cdot P_I(\alpha), \\ P_I(\alpha) \in \Phi(G^\theta)}} \left(q^{-\frac{|\Gamma \cdot P_I(\alpha)|}{2}} \right)^{\text{val}_F(S_{I_\alpha}(t^*) - 1)} \cdot \prod_{\substack{\Gamma \cdot P_I(\alpha), \\ P_I(\alpha) \notin \Phi(G^\theta)}} \left(q^{-\frac{|\Gamma \cdot P_I(\alpha)|}{2}} \right)^{\text{val}_F(S_{I_\alpha}(t^*) + 1)} \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon(\alpha) = -1$ falls α vom Typ III und sonst $\varepsilon(\alpha) = 1$.

Zusammen hat man nun (nach den Wahlen)

$$(\Delta_{II} \cdot \Delta_{IV})(\gamma, \delta) = \Delta^{U_{\hat{T}}}(\delta) / \Delta^H(\gamma),$$

so daß zu zeigen bleibt, daß die restlichen Faktoren zusammen Eins ergeben.

Beitrag von Δ_I^x : Dieser Faktor verschwindet, weil nach den Wahlen zu Beginn des Beweises

$$\lambda = \lambda_{\{a_\alpha\}}(T_{sc}^{\theta^*}) = h \cdot \left(\prod_{\substack{\alpha \in \Phi(G)_I^+ \\ \sigma_T^{-1} \alpha > 0}} a_\alpha^{\alpha^\vee} \right) \cdot n_{G_{sc}^{\Theta^*}} \left(\text{int}(h^{-1} \sigma(h)) \right) \cdot \sigma(h)^{-1}$$

aus (5.25) ein Korand ist. Das sieht man wie folgt:

Zum ersten darf man das vermittelnde h (mit $\text{inh} : \mathbb{T}_{sc}^{\theta^*} \xrightarrow{\sim} T_{sc}^{\theta^*}$) in $G_{sc}^{\theta^*}(F')_x$ wählen/annehmen, denn beide Tori lassen sich ausdehnen zu abgeschlossenen Untergruppenschemata von $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$ und ihre Reduktionen mod \mathfrak{p} sind konjugiert in $(\overline{G_{sc}^{\theta^*}})^\circ(\kappa(F'))$. Weil \mathcal{F} glatt ist, läßt sich (nach Hensels Lemma) diese Konjugation liften nach $G_{sc}^{\theta^*}(F')_x$.

Zum zweiten liegen (nach 4.15.b) die Steinbergrepräsentanten $n_{G_{sc}^{\Theta^*}}(\dots)$ für den Weylgruppenanteil der auf $\mathbb{T}_{sc}^{\theta^*}$ transportierten Galoisaktion von $T_{sc}^{\theta^*}$ in $G_{sc}^{\theta^*}(F')_x$. Dafür sorgt die Wahl des Referenzsplittings von $G_{sc}^{\theta^*}$ oben.

Drittens sind die a -Data Einheiten, so daß man schließt: $\lambda = \lambda_{\{a_\alpha\}}(T_{sc}^{\theta^*}) \in Z^1(F'/F, T_{sc}^{\theta^*}(F')_c)$. Wegen $H^1(F'/F, T_{sc}^{\theta^*}(F')_c) = 1$ (Lemma 3.39) ist λ ein Korand.

Beitrag von Δ_{III}^x :

Man muß die Kottwitz–Shelstad–Paarung von $V(\sigma) := ((v(\sigma)^{-1}, \overline{v}(\sigma)), (t^*, \overline{t}^{*-1}))$ mit $A(w) := ((a_T(w), x_{sc}(w))^{-1}, (\overline{s}, 1))$ ausrechnen. Das gequerte Referenzmatching erfüllt selbstverständlich die Normierungsbedingungen aus Definition 5.43. Insbesondere ist $\overline{t}^* = \overline{\delta\theta^{*-1}} \in \overline{T}(F')_x$.

Nach (8.5) kann man $g = 1$ annehmen und wegen Lemma 5.44 beim Referenzmatching $\overline{g} = 1$. Dann ist $V(\sigma) = j(s^*)$ und $S(F) \ni s^* := (\overline{t^*}, \overline{t^{*-1}}) = (\overline{\delta\theta^{*-1}}, \overline{t^{*-1}}) \in (T(F')_x, \overline{T}(F')_x) / \text{Cent}(G)$, d.h. $s^* \in S(F)_c$. Mit der Kompatibilität der Kottwitz–Shelstad–Paarung (vii) in (5.32) berechnet man

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{III}}^x(\gamma, \delta) &= \left\langle V(\sigma), A(w) \right\rangle_{KS} = \left\langle j(s^*), A(w) \right\rangle_{KS} \\ &= \left\langle (a_T(w), x_{sc}(w)) , s^* \right\rangle_L = 1. \end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Gleichheit, weil nach den Wahlen zu Beginn des Beweises $a_T(w)$ und $a_{\overline{T}}(w)$ unverzweigt sind (Vgl. Korollar 6.13). Mit (5.36) ist deswegen $(a_T(w), x_{sc}(w)) \in Z^1(W_F, \hat{S})$ unverzweigt. Daher verschwindet sein Charakter unter Langlandsreziprozität auf $S(F)_c$. (Das ist (3.37).) \square

Korollar 8.11. $\Delta(\gamma, \delta)$ hängt nur von den Bildern von δ in \tilde{G}_{ad} bzw. γ in H_{ad} ab.

Beispiele

Nach dem Korollar 8.11 ändert sich Δ^U aus 8.7 innerhalb der Isogenieklasse nicht. Weil G_{sc} (und G_{ad}) direkte Produkte von einfach algebraischen Gruppen sind und die Diskriminante Δ^U dabei ebenfalls in ein Produkt zerfällt, kann man sich im Folgenden eigentlich beschränken auf den Fall, daß G ein Θ^* -Orbit einer einfach algebraischen Gruppe ist und einfach zusammenhängt.

Beispiel 8.12. $L = G$, d.h. $\tilde{G} = G$ und $\Theta^* = id$.

Für einen unverzweigten anisotropen Torus T ist dann in Definition 8.7 $\tilde{T}(F) =$

$T(F) = U$ die einzige maximal kompakte Untergruppe. Man hat dann 8.7 für alle $\delta \in T_{ad}$

$$\Delta^{T(F)}(\delta) := \prod_{\mathcal{O} \text{ ist } \Gamma\text{-Orbit in } \Phi(G)} \left(-q_\alpha^{-\frac{1}{2}} \right)^{\text{val}_F(\alpha(\delta)-1)},$$

wobei die α ein Vertretersystem der Galoisorbits \mathcal{O} auf $\Phi(G, T)$ durchlaufen. Diese Diskriminante wurde von Weissauer in [W] betrachtet. Dasselbe Ergebnis hat man, wenn Θ^* trivial auf G operiert (nur hängt dann $U = \tilde{T}(F)$ nicht mehr zusammen.)

Beispiel 8.13. $G = G_1 \times \cdots \times G_l$, $\theta(x_1, \dots, x_l) := (x_l, x_1, \dots, x_{l-1})$ und $\tilde{G} = G \rtimes \langle \theta \rangle$ mit $\theta \in \tilde{G}(F)$.

Man hat $G_i = G_j$. Der Torus \tilde{T} ist genau dann anisotrop, wenn $\tilde{T}^\circ = T = T_1 \times \cdots \times T_l$ anisotrop ist. Sei $N_\theta : T \rightarrow T^\theta$ $t \mapsto \prod_{i=0}^{l-1} \theta^i(t)$ die Norm. Identifiziere $T^\theta \simeq T_1$ über die Projektion auf die erste Komponente. Dann ist in Definition 8.7 für alle $\delta = t \cdot \theta \in \tilde{T}(\bar{F})$ mit $N_\theta(t) \in (T^\theta)_{ad}(F)$

$$\Delta^{\tilde{T}(F)}(\delta) := \prod_{\Gamma \cdot \alpha \subset \Phi(G_1, T_1)} \left(-q_\alpha^{-\frac{1}{2}} \right)^{\text{val}_F(\alpha(N_\theta(t))-1)}.$$

Beispiel 8.14. Sei $\theta = \theta^* \in L(F)$ und $s = 1$ im endoskopischen Datum $(H, {}^L H, s, \xi)$. Dann ist $\hat{H} = \hat{G}^{\hat{\theta}^\circ}$. Daher ist $\Phi(T_H)^\vee = \Phi(\mathcal{T}_H) \subset \Phi(\mathcal{T})_I = (\Phi(T)^\vee)_I$ und mit (2.5.8) erhält man

$$\Phi(T_H) \ni \alpha_H = P_I(\alpha^\vee)^\vee = \begin{cases} S_{I\alpha} & \text{falls } \alpha \text{ vom Typ I, III} \\ 2 \cdot S_{I\alpha} & \text{falls } \alpha \text{ vom Typ II ist} \end{cases}$$

für geeignete $\alpha \in \Phi := \Phi(G, T)$. Weil $\hat{\theta}$ ein Splitting von \hat{G} fixiert, ist nach Steinbergs Satz 2.27

$$\Phi(\hat{H}) = \Phi(\hat{G})_I^{\text{kurz}} := \{P_I(\alpha^\vee) \mid \alpha^\vee \in \Phi^\vee(G) = \Phi(\hat{G}) \text{ vom Typ I oder II}\}.$$

Außerdem hat man

$$q_{\alpha_H} = q^{[F_\alpha:F]} = q^{|\Gamma \cdot \alpha_H|} = q^{|\Gamma \cdot P_I(\alpha^\vee)^\vee|} = q^{|\Gamma \cdot P_I(\alpha)|} = q_{P_I(\alpha)}.$$

Wenn man für ein Matching $T_H \ni \gamma \leftrightarrow \delta \in \tilde{T}(F)$ in den Bezeichnungen von Definition 5.9 die zulässige Einbettung $\eta : T_H \xrightarrow{\sim} T_{\theta^*}$ mit $\eta(\gamma) = P_{\theta^*}(t^*)$ in Erinnerung

ruft, kann man direkt mit Definition 8.7 verifizieren, daß

$$\begin{aligned}
\Delta^{T_H(F)}(\gamma) &:= \prod_{\Gamma \cdot \alpha_H \subset \Phi(H) \subset ((\Phi^\vee)_I)^\vee} \left(-q_{\alpha_H}^{-\frac{1}{2}} \right)^{\text{val}_F(\alpha_H(\gamma)-1)} \\
&= \prod_{\substack{\Gamma P_I(\alpha^\vee)^\vee \subset ((\Phi^\vee)_I)^\vee \\ \alpha^\vee \text{ vom Typ I}}} \left(-q_{P_I(\alpha)}^{-\frac{1}{2}} \right)^{\text{val}_F(S_{I\alpha}(P_{\theta^*}(t^*))-1)} \cdot \prod_{\substack{\Gamma P_I(\alpha^\vee)^\vee \subset ((\Phi^\vee)_I)^\vee \\ \alpha^\vee \text{ vom Typ II}}} \left(-q_{P_I(\alpha)}^{-\frac{1}{2}} \right)^{\text{val}_F(S_{I\alpha}(t^*)^2-1)} \\
&= \prod_{\substack{\Gamma P_I(\alpha) \subset \Phi(G)_I \\ \alpha \text{ vom Typ I, II}}} \left(-q_{P_I(\alpha)}^{-\frac{1}{2}} \right)^{\text{val}_F(S_{I\alpha}(t^*)-1)} \cdot \prod_{\substack{\Gamma P_I(\alpha) \subset \Phi(G)_I \\ \alpha \text{ vom Typ III}}} \left(-q_{P_I(\alpha)}^{-\frac{1}{2}} \right)^{\text{val}_F(-S_{I\alpha}(t^*)-1)} \\
&= \Delta^{\langle T(F)_c, \delta \rangle}(\delta)
\end{aligned}$$

Beispiel 8.15. Sei $\theta = \theta^* \in L(F)$, G vom Typ A_{2n} und $s \in \mathcal{T}$ sei so, daß $\text{int } s \circ \hat{\theta}$ ein spezieller Automorphismus ist, der kein Splitting von \hat{G} stabilisiert. (Dieser Fall wurde schon einmal erwähnt in der rechten Spalte der Tabelle zu Beispiel 2.19.) Dann kann man alles wie im letzten Beispiel rechnen, nur ergibt Steinbergs Kriterium 2.27 hier

$$\Phi(\hat{H}) = \Phi(\hat{G})_I^{\text{lang}} := \{P_I(\alpha^\vee) \mid \alpha^\vee \in \Phi^\vee(G) = \Phi(\hat{G}) \text{ vom Typ I oder III}\}.$$

so daß man nun erhält

$$\Delta^{T_H(F)}(\gamma) = \Delta^{\langle T(F)_c, \delta \rangle}(\delta) \cdot \prod_{\substack{\Gamma P_I(\alpha) \subset \Phi(G)_I \\ \alpha \text{ vom Typ III}}} \left(-q_{P_I(\alpha)}^{+\frac{1}{2}} \right)^{\text{val}_F(-S_{I\alpha}(t^*)-1)}$$

A Endoskopische Gruppen der unverzweigten einfachen Gruppen

(A.1) Sei $\Phi \subset V^*$ ein Wurzelsystem, Δ eine Basis von Φ und $\Theta \in \text{Aut}(\Phi, \Delta)$. Betrachte wieder den Kammerkomplex auf V^Θ zu $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$ aus (2.30).

Im Folgenden sei stets Λ das Gitter (in $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \otimes \mathbb{R}$) der speziellen Punkte. Nach Behauptung 2.39 ist $\Lambda = \mathbb{Z}[\Phi^{I, \text{lang}}]^* = \mathbb{Z}[((P_\Theta(\Phi^\vee))^\vee)^{\text{lang}}]^*$. Falls Φ irreduzibel ist, hat man nach (2.5) $\Lambda = P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*)$ außer im Ausnahmefall $\Phi = A_{2n}$ und $\Theta \neq \text{id}$. Im Ausnahmefall ist $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*) = P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$ und $\mathbb{Z}/2 \simeq \Lambda/P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*) = \Lambda/P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$. Im allgemeinen Fall ist Λ direktes Produkt der irreduziblen Fälle eben.

Bezeichne $\text{Aut}(\Phi)^\Theta := \text{Cent}(\Theta, \text{Aut}(\Phi))$. Wähle eine Kammer $C \subset V^\Theta$ mit $0 \in \overline{C}$. Zusätzlich zu $\Omega_C := \text{Stab}_C(P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*) \rtimes W^\Theta)$ aus (2.26) werden hier noch drei weitere Gruppen benötigt:

$$\begin{aligned} \Omega_C^{\text{spez}} &:= \text{Stab}_C(\Lambda \rtimes W^\Theta), \\ \Omega_C^{\text{ext}} &:= \text{Stab}_C(P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*) \rtimes \text{Aut}(\Phi)^\Theta) \simeq \text{Aut}(\Delta_{\text{aff}}(\Phi, \Theta)) \text{ und} \\ \Omega_C^{\text{spez, ext}} &:= \text{Stab}_C(\Lambda \rtimes \text{Aut}(\Phi)^\Theta). \end{aligned}$$

Weil sowohl die Operation von $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$ auf den Kammern von V^Θ als auch die Operation von Ω_C^{ext} auf den speziellen Punkten von C (bzw. $\Delta_{\text{aff}}(\Phi, \Theta)$) einfach transitiv ist, hat man folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta & \longrightarrow & \Lambda \rtimes W^\Theta & \longrightarrow & \Omega_C^{\text{spez}} \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta & \longrightarrow & \Lambda \rtimes \text{Aut}(\Phi)^\Theta & \longrightarrow & \Omega_C^{\text{spez, ext}} \longrightarrow 1 \\ & & & & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ & & & & \text{Aut}(\Delta(\Phi, \Theta)) & \xrightarrow{\sim} & \text{Stab}_0(\Omega_C^{\text{spez, ext}}), \end{array}$$

wobei $\Delta(\Phi, \Theta) = \Delta_{\text{aff}}(\Phi, \Theta) \setminus \{1 + S_{(\Theta)_{\tilde{\alpha}^\vee}}^\vee\}$. Dadurch erhält man Isomorphismen

$$\pi_1(\Phi_\Theta) \stackrel{\text{Def}}{=} P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*)/P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \simeq \Omega_C \quad \text{und} \quad \Omega_C^{\text{spez}} \simeq \Lambda/P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]).$$

Definition A.2. Betrachtet werden Sextupel $(V, \Phi, \Theta, \sigma, \text{Fr}, \beta^\vee)$ mit

- V ist ein Vektorraum und $\Phi \subset V^*$ ein Wurzelsystem.
- $\Theta \in \text{Aut}(\Phi, \Delta_{\text{aff}})$
- $\text{Fr} = \text{Cent}(\Theta, \text{Aut}(\Phi)) \stackrel{\text{Def}}{=} \text{Aut}(\Phi)^\Theta$
- σ ist das Bild von Fr unter der Projektion auf den zweiten Faktor bei der Zerlegung $\text{Aut}(\Phi) = W \rtimes \text{Aut}(\Phi, \Delta)$. Offensichtlich vertauscht σ mit Θ .

- $\beta^\vee \in \mathbb{Z}[\Phi]^*$

Sextupel heißen **anisotrop**, wenn $(\text{Fr} - 1)V^\Theta = V^\Theta$. Anisotrope Sextupel heißen **primitiv**, wenn Fr primitiv ist im Sinne von [BFW], d.h. $|(\Lambda/P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]))^{\text{Fr}}| = |H^1(\langle \text{Fr} \rangle, P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]))|$

Äquivalent sind zwei Sextupel $(V, \Phi, \Theta, \sigma, \text{Fr}, \beta^\vee) \approx (V, \Phi, \Theta, \tilde{\sigma}, \tilde{\text{Fr}}, \tilde{\beta}^\vee)$, wenn ein $t \rtimes w \in P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$ existiert, so daß einerseits $\tilde{\text{Fr}} = w \text{Fr} w^{-1}$ und andererseits $P_I(\tilde{\beta}^\vee) = (t \rtimes w)(P_I(\beta^\vee))$. Klarerweise ist dabei $\tilde{\sigma} = \sigma$.

(A.3) In diesem Appendix soll für alle irreduziblen Φ und alle Äquivalenzklassen von anisotropen, primitiven Sextupeln $(\mathbb{Z}[\Phi^\vee] \otimes \mathbb{R}, \Phi, \Theta, \sigma, \text{Fr}, \beta^\vee)$ folgende Gleichung (in v) gelöst werden

(*)

$$\text{Fr}(v) \equiv v + \beta^\vee \pmod{\mathbb{Z}[\Phi^\vee] + (1 - \Theta)V}$$

oder äquivalent umformuliert

(**)

$$(\text{Fr} - 1)(P_\Theta(v)) \equiv P_\Theta(\beta^\vee) \pmod{P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])}$$

Der Abschluß des Alkovens zu $\Delta_{aff}(\Phi, \Theta)$, der in (2.32) bis (2.40) definiert wurde, ist ein (schwacher) Fundamentalbereich für die Operation von $P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$ auf V^Θ . Indem man das Sextupel innerhalb seiner Äquivalenzklasse geeignet abändert, sucht man also Lösungen der Gleichung (*) in einem fest gewählten (abgeschlossen) Alkoven zu $\Delta_{aff}(\Phi, \Theta)$.

(A.4) Die Projektion der Lösungen der homogenen Gleichung (*), d.h. der Gleichung zu Sextupeln mit $\beta \in \mathbb{Z}[\Phi^\vee]$, liegen in V^σ : Sei $\bar{v} := P_\Theta(v) \in \bar{C}$ eine homogene Lösung von (**). Dann existiert ein $w \in P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$, so daß $w(\bar{v}) = \sigma(\bar{v}) \in \bar{C}$ (denn σ bildet C in sich ab). Nach dem Satz von Chevalley–Steinberg 1.6 gilt daher $w(\bar{v}) = \bar{v}$. Also ist $\bar{v} \in V^\sigma$.

Behauptung A.5. Genau dann ist $(V, \Phi, \Theta, \sigma, \text{Fr}, \beta^\vee)$ primitiv, wenn es kein Θ - und σ -stabiles Subsystem Φ' von Φ gibt, so daß die $W(\Phi)^\Theta$ -Konjugationsklasse von Fr einen Vertreter in $W(\Phi')^\Theta \rtimes \sigma$ hat.

Beweis: Man darf Φ irreduzibel annehmen. Zuerst beobachtet man, daß $(w - 1)\Lambda \subset P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$ für alle $w \in W^\Theta \rtimes \sigma$. Als zweiten Schritt errechnet man für anisotropes $\text{Fr} = w\sigma \in W^\Theta \rtimes \sigma$:

$$\begin{aligned} H^1(\langle \text{Fr} \rangle, P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])) &\stackrel{\text{Def}}{=} P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) / (\text{Fr} - 1)(P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])) \\ &= (\text{Fr} - 1)^{-1}(P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])) / P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \supset \left(\Lambda / P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \right)^{\text{Fr}}. \end{aligned}$$

Nach Definition ist Fr primitiv genau dann, wenn ganz links Gleichheit gilt. Mit (A.4) hat man

$$\begin{aligned} (\text{Fr} - 1)^{-1}(P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])) &= \{x \in V^\Theta \mid \text{Fr}(x) \equiv x \bmod P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])\} \\ &= \left\{x \in V^{(\Theta, \sigma)} \mid \text{Fr} \cdot \sigma^{-1} \in \text{Bild} \left[(P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta)_x \xrightarrow{\text{Proj.}} W^\theta \right] \right\} \end{aligned}$$

Diese Menge ist genau dann gleich dem Gitter $\Lambda \cap V^\sigma$ der σ -invarianten $(\Theta-)$ speziellen Punkte, wenn es kein Θ - und σ -stabiles Subsystem Φ' von Φ gibt, so daß die W^Θ -Konjugationsklasse von Fr einen Vertreter in $W(\Phi')^\Theta \rtimes \sigma$ hat. \square

Behauptung A.6. *Sei L eine über F definierte Zusammenhangskomponente der unverzweigten reduktiven Gruppe $\tilde{G} = \langle L \rangle$. Bezeichne $\Phi := \Phi(\tilde{G}) \simeq \Phi^\vee(G)$ und $G = \tilde{G}^\circ$. Die Operation von L auf G definiert einen äußeren Automorphismus, d.h. einen Diagrammautomorphismus von $\Delta \subset \Phi = \Phi^\vee(G)$. Sei $\Theta \in \text{Aut}(\Phi, \Delta)$ der Lift dieser Aktion (von L) und $I = \langle \Theta \rangle$. Sei*

$$\Phi(v) := \left\{ P_I(\alpha) \mid \alpha \in \Phi \text{ und } S_{I\alpha}(v) \in \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } \alpha \text{ vom Typ I, II} \\ \frac{1}{2} + \mathbb{Z} & \text{falls } \alpha \text{ vom Typ III} \end{cases} \right\}.$$

Dann sind äquivalent

- $(\Phi(v))^\vee$ ist das Wurzelsystem einer endoskopische Gruppe H zu (G, θ, a') , so daß erstens $\Phi(\hat{H}) = \Phi(v)$ und zweitens das Bild von $m_\xi(\text{Frob}) \rtimes \text{Frob}$ aus (5.3.4) in $\text{Aut}(\Phi)$ gleich Fr ist.
- v löst die Gleichung $(*)$ für ein Sextupel $(\mathbb{Z}[\Phi^\vee] \otimes \mathbb{R}, \Phi, \Theta, \rho_G(\text{Frob}), \rho_{\mathcal{H}}(\text{Frob}), \beta^\vee)$ mit $\beta^\vee \in \mathbb{Z}[\Phi]^*$ so, daß $\exp \beta^\vee = a'(\text{Frob}) \in \mathcal{T} \xrightarrow{\exp} (V \otimes \mathbb{C})/X_*(\mathcal{T})$ für einen maximalen Torus $\mathcal{T} \subset \hat{G}$.

Äquivalente Sextupel ergeben dabei isomorphe endoskopische Daten.

Beweis: Die Äquivalenz der ersten beiden Punkte sieht man mit den Konventionen von (5.5), indem man die Exponentialsequenz $1 \rightarrow X_*(\mathcal{T}) \rightarrow V \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathcal{T} \rightarrow 1$ benutzt, um die Definition der endoskopischen Gruppe (5.3) in V zu formulieren. Dabei ist $s = \exp(v)$, Fr das Bild eines Erzeugers (Frobenius) der Galoisgruppe unter $\rho_{\mathcal{H}} \text{Aut}(\hat{H}) \subset \text{Aut}(\Phi)$ und das $\hat{\theta}$ aus (5.3) ergibt den hier Θ benannten Automorphismus. Die erste Bedingung in (5.3.4) besagt nach Steinberg 2.27 gerade $\Phi(v) = \Phi(\hat{G}^{s\hat{\theta}}) = \Phi(\hat{H})$. Die zweite Bedingung aus (5.3.4) ist bei zyklischer Galoisgruppe (wie man mit (5.8) sieht) die Gleichung $(*)$.

Zwei äquivalente Sextupel werden nach Definition durch ein $x \rtimes w \in P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$ ineinander übergeführt. Wenn v eine Lösung von $(*)$ mit Fr und β^\vee ist, so ist $w(v)$ eine Lösung von $(*)$ mit $w \text{Fr} w^{-1} = \tilde{\text{Fr}}$ und $(x \rtimes w)(\beta^\vee) = \tilde{\beta}^\vee$. Weil $\hat{\theta}$ ein Splitting von \hat{G} stabilisiert, gibt es nach Lemma 2.7 ein Urbild $g \in \text{Norm}(\mathcal{T}, \hat{G})^{\hat{\theta}}$ von $w \in W^\Theta$. Dann ist nach dem letzten Absatz in (5.3) durch g ein Isomorphismus von

endoskopischen Daten gegeben, denn $s' = \exp(\tilde{v}) = (\exp(w(v))) = g \exp(v) g^{-1} = g \cdot s \cdot \hat{\theta}(g)^{-1}$. \square

Nach dieser Behauptung ist (A.3) gleichbedeutend zur Klassifikation aller Isomorphieklassen von unverzweigten endoskopischen Gruppen zu den einfachen algebraischen Gruppen, für die die Operation des Frobenius für ein $\hat{T} \subset \hat{G}$ anisotrop und primitiv in $W^{ext} := \text{Aut}(\Phi(\hat{T}, \hat{G}))$ ist. Für nicht einfach zusammenhängenden Gruppen G kommen dabei nur Sextupel in Betracht, für die β^\vee in $\pi_1(\hat{G}) \subset \pi_1((\hat{G})_{ad}) = \mathbb{Z}[\Phi]^* / \mathbb{Z}[\Phi^\vee]$ vorkommt.

(A.7) Eine Lösung v von $(*)$ wird in einem gewisteten affinen Dynkingraphen angegeben werden und zwar wie folgt: Fixiere einen Alkoven C zu $\Delta_{aff}(\Phi, \Theta)$. Es gibt (genau) ein $\omega = \omega(\text{Fr}, \beta^\vee) \in \Omega_C^{\text{ext}}$, so daß $-P_\Theta(\beta^\vee) \rtimes \text{Fr} \in \omega \cdot (P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta)$. Das affine Dynkindiagramm $\Delta_{aff}(\Phi, \Theta)$ wird mit der Operation von ω versehen und im Diagramm der ω -Orbiten (Quotientendiagramm) wird ein Orbit von Ecken genau dann geschwärzt, wenn für eine (und damit für jede) Ecke des Orbits v nicht auf der zu dieser Ecke gehörenden (gegenüberliegenden) Wand liegt.

Satz A.8. Sei $(\mathbb{Z}[\Phi^\vee] \otimes \mathbb{R}, \Phi, \Theta, \sigma, \text{Fr}, \beta^\vee)$ anisotrop und primitiv mit irreduziblem Φ .

- (a) Für jeden Punkt v , der $(*)$ löst, wird genau ein ω -Orbit in $(\Delta_{aff}(\Phi, \Theta), \omega)$ geschwärzt.
- (b) Alle Punkte, für die $(*)$ gilt, bilden einen Orbit unter $\text{Cent}(\omega, \Omega_C^{\text{spez}})$.
- (c) Falls $\beta^\vee = 0$, so ist die Menge der Punkte, die $(*)$ genügen (d.h. die homogenen Lösungen), gerade die Menge der speziellen Punkte im Quotientendiagramm zu $(\Delta_{aff}(\Phi, \Theta), \sigma)$, i.e. die Menge der σ -fixierten, in $\Delta_{aff}(\Phi, \Theta)$ speziellen Ecken.

Beweis: Zu (a): Sei $\bar{v} = P_\Theta(v) \in \bar{C}$ eine Lösung von $(**)$. Mit dem ω aus (A.7) gilt dann $\omega(\bar{v}) \equiv \bar{v} \pmod{P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta}$, woraus nach dem Satz von Chevalley–Steinberg 1.6 folgt, daß $\omega(\bar{v}) = \bar{v}$. Daher wird immer ein ganzer ω -Orbit geschwärzt bzw. weiß gelassen. Um zu zeigen, daß nicht mehr als ein Orbit geschwärzt wird, benutzt man daß \bar{C} ein Simplex ist, dessen Ecken $v_\alpha := \frac{1}{c_{I\alpha} \cdot c(\alpha)} P_\Theta(\beta_{I\alpha}^\vee)$ und $v_{\bar{\alpha}} := 0$ in (2.40) angegeben wurden. Demnach gibt es $0 \leq x_\alpha$ mit

$$\bar{v} = \sum_{I\alpha \subset \Delta \cup I\alpha} x_\alpha v_\alpha \quad \text{und} \quad \sum_{I\alpha \subset \Delta \cup I\alpha} x_\alpha = 1.$$

Sei $l := \text{ord} \omega$. Weil $l\bar{v}$ Lösung der homogenen Gleichung ist, hat man nach Teil (c) $l\bar{v} \in P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*) \cap V^\sigma$. Daher teilt $c_{I\alpha} c(\alpha) \mid lx_\alpha \in \mathbb{Z}$. Aus dieser Bedingung folgt sofort die

Behauptung A: Sei α' aus einem ω -Orbit der Länge $l = \text{ord} \omega$, so daß $\bar{v} = \sum x_\alpha v_\alpha$ eine Lösung von $(**)$ ist mit $x_{\alpha'} > 0$. Dann ist $\bar{v} = \frac{1}{l} \sum_{\gamma \in \langle \omega \rangle_{\alpha'}} v_\gamma$ (und $v_{\alpha'} \in \mathbb{Z}[\Phi]^*$).

Behauptung B: Für eine Lösung $\bar{v} = \sum x_\alpha v_\alpha$ von (**), enthält

$$M(v) := \{\alpha \in \Delta_{aff}(\Phi, \Theta) \mid x_\alpha > 0 \text{ und } \omega \text{ fixiert } v_\alpha.\}$$

höchstens ein Element.

Beweis: Bewiesen wird, daß alle $\sum_{\alpha \in M(v)} y_\alpha v_\alpha$ mit $y_\alpha \geq 0$ und $\sum_{\alpha \in M(v)} y_\alpha = 1$ die Gleichung (**) (für hiermit fixierten Fr und β^\vee) lösen. Hieraus folgt die Behauptung wegen der Bedingung $ly_\alpha \in \mathbb{Z}$.

Aus (**) folgt, daß es eine Translation aus $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) - P_\Theta(\beta^\vee)$ gibt, so daß $(t \cdot \text{Fr})(v) = v$. Weil $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$ markierungserhaltend und auf den Kammern von V^Θ transitiv operiert, gibt es ein $\rho \in (P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta)_v$, so daß $\rho \cdot t \cdot \text{Fr}$ die Kammer C stabilisiert. Man hat $\omega = \rho \cdot t \cdot \text{Fr}$ (nach Konstruktion). Nach dem Satz von Chevalley–Steinberg 1.6 fixiert ρ die Ecken v_α für $\alpha \in M(v)$. Also hat man (für $\alpha \in M(v)$) $\omega(v_\alpha) = v_\alpha = \rho(v)$, d.h. $v_\alpha = (\rho^{-1}\omega)(v_\alpha) = (t \cdot \text{Fr})(v_\alpha)$, woraus durch Summation über $\text{Fr}(y_\alpha v_\alpha) = y_\alpha \text{Fr}(v_\alpha) = y_\alpha v_\alpha + y_\alpha t$ die Behauptung folgt.

Indem man alle (irreduziblen) Fälle durchgeht, sieht man, daß es außer im nachfolgenden D_n -Fall für alle (Φ, Θ, ω) nur zwei ω -Orbitlängen von Ecken (von C) gibt, nämlich 1 und $l = \text{ord}\omega$. In diesen Fällen folgt aus den Behauptungen A und B, daß höchstens ein ω -Orbit geschwärzt wird. Zu zeigen bleibt diese Aussage im

Fall $\Phi = D_n$ und $l = \text{ord}\omega = 4$. Man hat dann folgende ω -Orbiten (und c_α)



Der ω -Orbit der Länge 4 tritt nach Behauptung A (höchstens) alleine auf. Sei $\{\alpha', \omega\alpha'\}$ ein ω -Orbit und $x_{\alpha'} > 0$. Weil $4x_{\alpha'} \in \mathbb{N}$ gerade sein muß, ist $x_{\alpha'} \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Da $\sum x_\alpha = 1$ und $\omega x_\alpha = x_\alpha$, folgt $x_\alpha = 0$ für alle α außerhalb des ω -Orbits von α' . Weil C höchstens eine ω -fixierte Ecke besitzt, ist man fertig.

Zu (b): Seien $v_1, v_2 \in \bar{C}$ zwei verschiedene Lösungen von (*) für eine gegebene Äquivalenzklasse eines Sextupels und $\bar{v}_i := P_\Theta(v_i)$, d.h. es existieren $w_i \in W^\Theta$, so daß

$$\begin{aligned} (w_i^{-1} \text{Fr } w_i)(\bar{v}_i) &\equiv \bar{v}_i + P_\Theta(\beta^\vee) \pmod{P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])}. \\ \iff \text{Fr}(w_i \bar{v}_i) &\equiv w_i \bar{v}_i + w_i P_\Theta(\beta^\vee) \equiv w_i \bar{v}_i + P_\Theta(\beta^\vee) \pmod{P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])}. \end{aligned}$$

Also löst $x_0 := w_1 \bar{v}_1 - w_2 \bar{v}_2$ die homogene Gleichung. Nach Teil (c) ist daher $x_0 \in P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*)$. Also gibt es $\omega_1 = \rho_1 \cdot t_1 \in \Omega_C^{\text{spez}}$ mit $\omega_1(\bar{v}_1) = \bar{v}_2$, $\rho_1 \in P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$ und der Translation $t_1 : x \mapsto x + x_0$.

Bezeichne t die Translation um $-P_\Theta(\beta^\vee)$ auf V^Θ . Dann existiert ein $\rho \in P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$ mit $\omega = \rho \cdot t \cdot \text{Fr}$. Nun rechnet man

$$\omega(x_0) = (\rho \cdot t \cdot \text{Fr})(w_1 \bar{v}_1 - w_2 \bar{v}_2) \equiv \rho(x_0) \equiv x_0 \pmod{P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])},$$

d.h. die Klasse von x_0 in $\Lambda/P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$ ist ω -invariant. Somit vertauschen ω und ω_1 .

Zu (c): Sei $\bar{v} = P_\Theta(v) \in \overline{C} \cap V^\Theta$ eine homogene Lösung von (**). Nach (A.4) liegt \bar{v} in V^σ .

Weil Fr anisotrop auf V^Θ operiert, ist $(\text{Fr} - 1)|_{V^\Theta}$ invertierbar, d.h. $(\text{Fr} - 1)^{-1}P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$ ist ein Gitter in V^Θ . Sei $\bar{v} \in (\text{Fr} - 1)^{-1}P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$, d.h. $\text{Fr} \cdot \sigma^{-1} \in W^\Theta$ liegt in der Projektion auf W^θ von $(P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta)_{\bar{v}} = (P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta)_{\text{Facette}(\bar{v})}$ (nach dem Satz von Chevalley–Steinberg 1.6). Also liegt die ganze Facette, in der \bar{v} liegt, in $(\text{Fr} - 1)^{-1}P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$. Weil diese Gruppe diskret ist, muß die Facette ein Punkt (\bar{v} selbst) sein.

Da $\text{Fr} \in W^\Theta \rtimes \sigma$ primitiv ist, muß nach Lemma A.5 die Projektion $(P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes (W^\Theta \rtimes \langle \sigma \rangle))_{\bar{v}} \rightarrow W^\Theta \rtimes \langle \sigma \rangle$ surjektiv sein. Daher ist auch die (Einschränkung der) Projektion auf W^Θ surjektiv und weil $\bar{v} \in V^\sigma$, ist \bar{v} speziell in $\Delta_{aff}(\Phi, \Theta)$.

Wenn umgekehrt $P_\Theta(v) \in V^\sigma$ eine spezielle Ecke von C ist, so ist v Lösung der homogenen Gleichung (*), da jedes Urbild von Fr unter $(P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes (W^\Theta \rtimes \langle \sigma \rangle))_{P_\Theta(v)} \rightarrow W^\Theta \rtimes \langle \sigma \rangle$ eine Lösung angibt. \square

Nach diesem Satz (a) werden alle Lösungen zu gegebenem $(\Phi, \Theta, \text{Fr}, \sigma, \beta^\vee)$ aus Platzgründen in ein Diagramm eingetragen.

Beispiel A.9. $\Phi = A_{2n}$ und $\text{ord}(\Theta) = 2$.

Nach Beispiel 2.41 ist der Alkoven $C \in V^\Theta$ zu $\Delta_{aff}(\Phi, \Theta)$ mit $0 \in \overline{C}$ die um den Faktor $\frac{1}{2}$ gestauchte Kammer $C_0 \cap V^\Theta$ für einen Alkoven C_0 des A_{2n} -Systems. Man hat in diesem Fall

$$\Omega_C = \Omega_C^{\text{ext}} = 1 \quad \text{und} \quad \Omega_C^{\text{spez}} = \Omega_C^{\text{spez, ext}} \simeq \mathbb{Z}/2.$$

Weil hier $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) = P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*)$ gilt, hat man nur die homogene Gleichung (*) zu betrachten. Man errechnet zwei Lösungen im Alkoven, von denen genau eine in $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*)$ liegt.

(A.10) Falls $(\Phi, \Theta) \neq (A_{2n}, \text{Flip})$, kann man die Punkte (b) und (c) des Satzes A.8 auch so formulieren

(b') *Alle Punkte, für die (*) gilt, bilden einen Orbit unter den Diagrammautomorphismen des Quotientendiagramms zu $(\Delta_{aff}(\Phi, \Theta), \omega)$, die von Diagrammautomorphismen von $\Delta_{aff}(\Phi, \Theta)$ herkommen, die mit ω vertauschen.*

(c') *Die Lösungen der homogenen Gleichungen (*) sind $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi]^*) \cap V^\sigma$.*

Bezeichnungen

(A.11) Die Bezeichnungen der folgenden Tabellen sind alle aus [BFW], insbesondere die Namen der primitiven Konjugationsklassen. Sie stammen ursprünglich aus

[Ca72]. Für die Serien wird folgende Notation von signierten Zykeln verwendet: Ein signierter Zykel w der Länge r ist beschrieben durch die Abbildungsvorschrift

$$\varepsilon_{a_1} \mapsto \pm \varepsilon_{a_2} \mapsto \pm \varepsilon_{a_3} \mapsto \dots \mapsto \pm \varepsilon_{a_r} \mapsto \pm \varepsilon_{a_1}$$

sowie die "Parität der Vorzeichen": er wird **positiv** bezeichnet, falls $\text{ord}(w) = r$ und **negativ**, falls $\text{ord}(w) = 2r$ (d.h. $w^r(\varepsilon_{a_1}) = -\varepsilon_{a_1}$). Einen negativen Zykel schreibt man $w = (a_1, a_2, \dots, a_r)^-$, einen positiven $w = (a_1, a_2, \dots, a_r)$.

Die Menge aller Produkte paarweise ziffernfremder signierter Zykeln mit positiven Zykeln der Längen a, b, c, \dots und negativen Zykeln der Längen A, B, C, \dots wird (wie bei Carter [Ca72]) mit $[abc\dots \bar{A}\bar{B}\bar{C}\dots]$ bezeichnet.

(A.12) Die Numerierung der Wurzeln, Kowurzeln und Gewichte folgt in [BFW] Bourabaki. In der Tabelle 2.36 hat man dabei folgende Nummern:

Φ	$\Theta^* = id$	$\text{Ord}\Theta^* = 2$
A_{2n-1}	$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & & \dots & (n-1) & \\ 0 & & & & & & \\ & (2n-1) & (2n-2) & & \dots & (n+1) & n \end{array}$	$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 0 & 2 & 3 & \dots & (n-2) & (n-1) & n \end{array}$
C_n	$0 \ 1 \ 2 \ \dots \ (n-2) \ (n-1) \ n$	
A_{2n}	$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & & \dots & (n-1) & n \\ & 2n & (2n-1) & & \dots & (n+2) & (n+1) \end{array}$	$0 \ 1 \ 2 \ \dots \ (n-2) \ (n-1) \ n$
D_{n+1}	$\begin{array}{ccccccc} 0 & & & & & & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & (n-2) & (n-1) & n \\ & & & & & & (n+1) \end{array}$	$0 \ 1 \ 2 \ \dots \ (n-2) \ (n-1) \ n$
B_n	$\begin{array}{ccccccc} 0 & & & & & & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & (n-2) & (n-1) & n \end{array}$	
E_8	$\begin{array}{ccccccc} & & 2 & & & & \\ & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \end{array}$	
E_7	$\begin{array}{ccccccc} & & & 2 & & & \\ & 0 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$	
E_6	$\begin{array}{ccccccc} & & & & 3 & 1 & \\ & 0 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{array}$	$4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0$
F_4	$0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4$	
		$\text{Ord}\Theta^* = 3$
D_4	$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & 2 & 3 & & \\ & & & & 4 & & \end{array}$	$2 \ 1 \ 0$
G_2	$0 \ 2 \ 1$	

(A.13) Die Diagramme werden mit den jeweiligen Namen aus [Ti79, 4.3] versehen. Insbesondere werden die Entartungen der Serien-Diagramme für kleine n nur mit Verweis auf die Tabellen in [Ti79] angegeben.

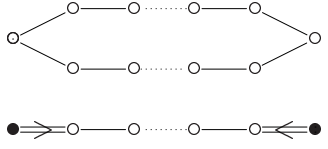
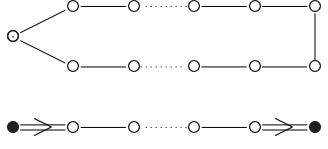
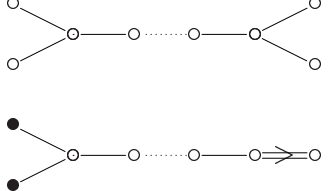
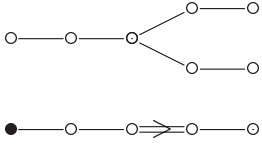
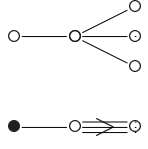
Die Zahl links neben dem Quotientendiagramm gibt an, wieviele Punkte das untere Diagramm hat.

Bemerkung: Alle Diagramme in [Ti79, 4.3] kommen in den folgenden Liste vor.

Homogene Lösungen: $\beta^\vee = 0$ mit $\sigma = id$

Φ	$\theta = id$	$\text{Ord}(\theta) = 2$
A_{2n-1} $n \geq 2$		 bzw.
C_n $n \geq 2$		
A_{2n}		 bzw.
D_{n+1} $n \geq 4$		
B_n $n \geq 3$		
Nur $\theta = id$ möglich:		
E_8		
E_7		
	$\theta = id$	$\text{Ord}(\theta) = 2$
E_6		
F_4		
	$\theta = id$	$\text{Ord}(\theta) = 3$
D_4		
G_2		

Homogene Lösungen mit $\sigma \neq id$

Φ	
A_{2n-1} $n \geq 2$	
A_{2n}	
D_{n+1} $n \geq 4$	
E_6	
D_4	

Die Diagramme für $\Theta \neq id$ sind langweilig: Für sie gilt $\Theta = \sigma$ oder $\Theta = \sigma^{-1}$ (im Falle $D_4!$), so daß σ auf dem Alkoven bzgl. $P_\Theta(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^\Theta$ trivial operiert. Daher genügen die Diagramme der ersten Tabelle auf der Vorseite.

Der Alkoven zum Quotientendiagramm des A_{2n} -System hier ist nicht derselbe wie der zu $\Delta_{aff}(\Phi(A_{2n}), \Theta \neq id)$ sondern nur proportional zu ihm. Der Alkoven von A_{2n} ist gleich

$$\text{Alk}(A_{2n}) := \{(x_1, \dots, x_{m+1}) \in V \mid 1 + x_{m+1} > x_1 > x_2 > \dots > x_m > x_{m+1}\}.$$

Daher ist der Alkoven des Quotientendiagramms gleich

$$\text{Alk}(A_{2n}) \cap V^\sigma = \left\{ (x_1, \dots, x_n, 0, -x_n, \dots, -x_1) \in V^\sigma \mid \frac{1}{2} > x_1 > x_2 > \dots > x_n > 0 \right\}$$

wogegen

$$\mathrm{Alk}(\Delta_{aff}(\Phi(A_{2n}), \Theta)) = \left\{ (x_1, \dots, x_n, 0, -x_n, \dots, -x_1) \in V^\Theta \mid \frac{1}{4} > x_1 > x_2 > \dots > x_n > 0 \right\}.$$

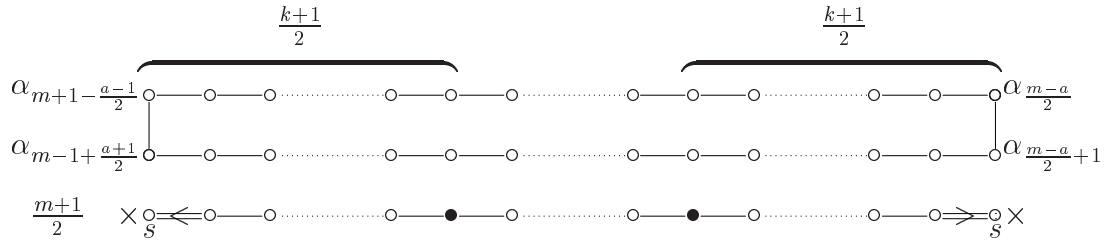
Inhomogene Lösungen

Φ ist vom Typ A_m und $\beta^\vee = \beta_a^\vee \equiv a\beta_1^\vee \pmod{\mathbb{Z}[\Phi^\vee]}$:

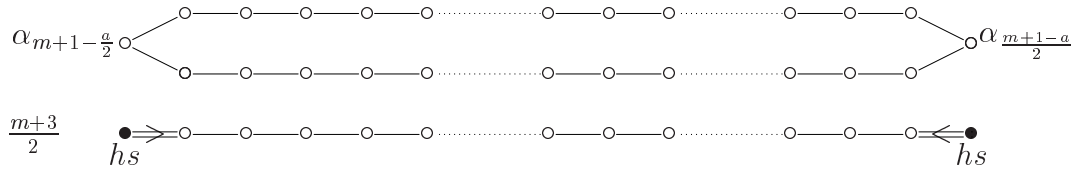
Fall 1: $\Theta = \text{id}$.

Fall 1.1: Sei $\text{Fr} \in W$ die Coxeterklasse und $c := \frac{m+1}{\text{ggT}(a, m+1)}$. Die Gleichung $(*)$ hat $\text{ggT}(a, m+1)$ verschiedene Lösungen, deren Diagramm in [Ti79] mit ${}^c A_m$ bezeichnet wird. Dabei ist jeder der $\text{ggT}(a, m+1)$ Punkt im relativ lokalen Dynkindiagramm geschwärzt.

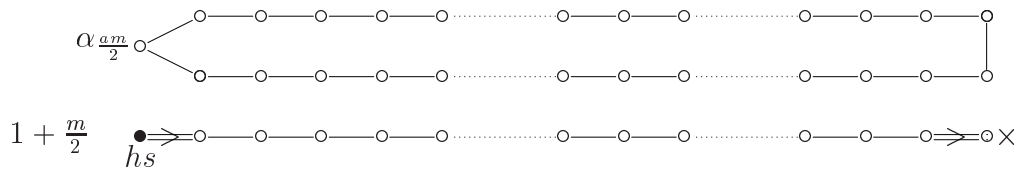
Fall 1.2: Sei m ungerade und $\text{Fr} \in -[k, m+1-k] \subset W \rtimes \sigma$ mit ungeradem k . Falls a ungerade ist, gibt es zwei Lösungen in einem ${}^2 A_m''$ -Diagramm: ¹



Falls a gerade ist, gibt es zwei Lösungen in einem ${}^2 A'_m$ -Diagramm:



Fall 1.3: Sei $m = \text{gerade}$ und $\text{Fr} \in -[m+1] \subset W \rtimes \sigma$ das getwistete Coxeterelement. Die Lösungsmenge ist nur ein Punkt in einem ${}^2 A'_m$ -Diagramm: ²



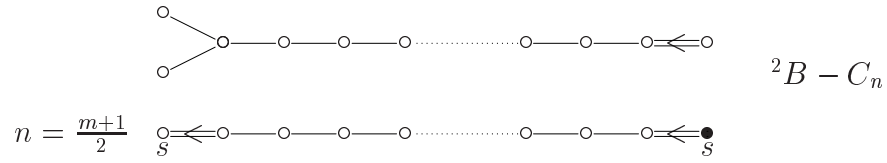
(Beachte, daß $m+1$ und $\frac{m}{2}$ teilerfremd sind, so daß $\beta_{\frac{m}{2}}^\vee$ die Fundamentalgruppe $\pi(\Phi)$ erzeugt.)

¹Dieses Diagramme hat man für $m \geq 5$. Für $m = 3$ entarten sie zu ${}^2 A_3''$ in [Ti79].

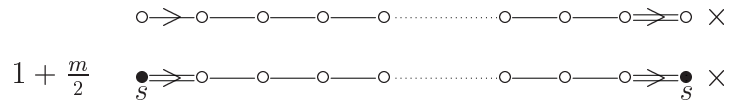
²Dieses Diagramme hat man für $m \geq 4$. Für $m = 2$ entarten sie zu ${}^2 A_2'$ in [Ti79].

Fall 2: $\Theta \neq \text{id}$.

Fall 2.1: Sei $m = 2n - 1$ ungerade und $\text{Fr} \in W^\Theta \rtimes \langle \Theta \rangle$ so, daß Fr auf dem C_n -System $P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$ als Coxeterelement operiert.

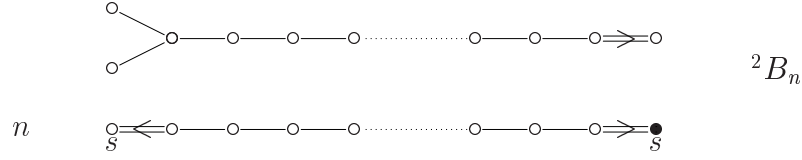


Fall 2.2: Wenn m gerade ist, hat man nur die homogene Gleichung zu lösen, da dann $P_I(\mathbb{Z}[\Phi]^*) = P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$.



Φ ist vom Typ B_n ($n \geq 3$) :

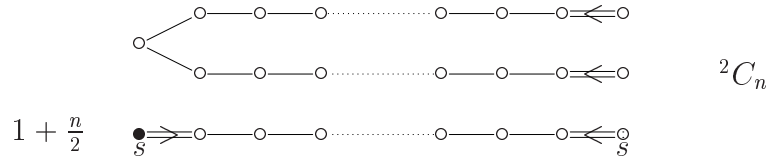
Sei $\beta^\vee = \beta_1^\vee$ und $\text{Fr} \in [\bar{n}]$ das Coxeterelement. Dann ist die einzige Lösung



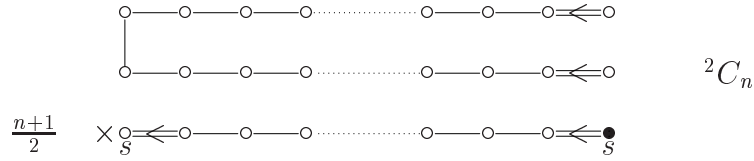
Φ ist vom Typ C_n ($n \geq 2$) :

Sei $\beta^\vee = \beta_n^\vee$ und $\text{Fr} = [\bar{n}]$ das Coxeterelement.

Falls n gerade ist, ist die einzige Lösung: ³



Falls n ungerade ist, ist die einzige Lösung: ⁴



³Dieses Diagramm hat man für $n \geq 4$. Für $n = 2$ entartet es zu 2C_2 in [Ti79].

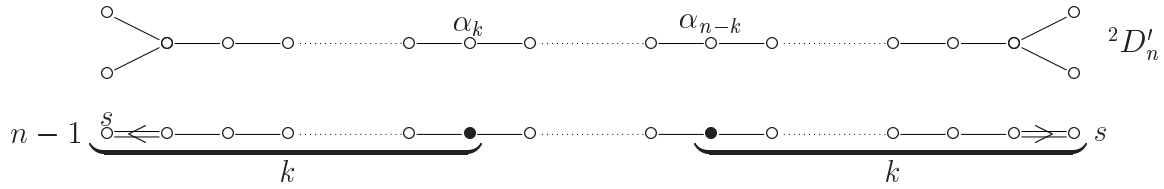
⁴Dieses Diagramm hat man für $n \geq 5$. Für $n = 3$ entartet es zu 2C_3 in [Ti79].

D_n ($n \geq 4$) :

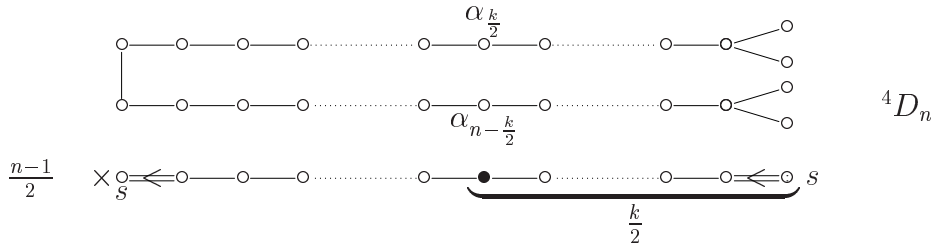
Fall 1: $\Theta = \text{id}$.

In den Fällen 1.1 bis 1.3 ist $\text{Fr} \in W$, in den Fällen 1.4 bis 1.6 ist $\text{Fr} \in W \rtimes \sigma_2$ und in 1.7 ist $\text{Fr} \in W(D_4) \rtimes \sigma_3$.

Fall 1.1: Sei $\beta^\vee = \beta_1^\vee$ und $\text{Fr} \in [\bar{k}, \overline{n-k}] \in W$ mit $1 \leq k \leq n-1$. Es gibt zwei Lösungen:

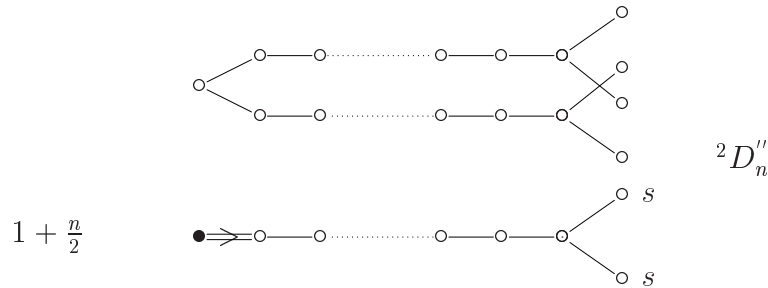


Fall 1.2: Sei n ungerade, $\beta^\vee \in \{\beta_{n-1}^\vee, \beta_n^\vee\}$ und $\text{Fr} \in [\bar{k}, \overline{n-k}] \in W$, wobei o.E. k gerade und $n-k$ ungerade seien. Dann ist die einzige Lösung: ⁵



Fall 1.3: Sei n gerade, $\beta^\vee \in \{\beta_{n-1}^\vee, \beta_n^\vee\}$ und $\text{Fr} \in [\bar{k}, \overline{n-k}] \in W$. Es gibt nur eine Lösung.

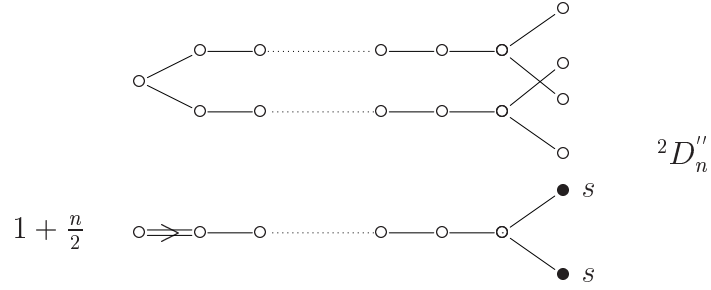
Falls k und $n-k$ gerade sind, erhält man: ⁶



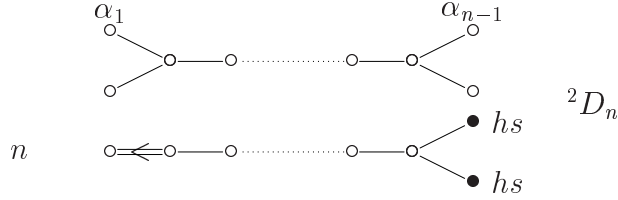
⁵Dieses Diagramm hat man für $n \geq 7$. Für $n = 5$ entartet es zu 4D_5 in [Ti79].

⁶Dieses Diagramm hat man für $n \geq 4$. Für $n = 4$ entartet es zu ${}^2D'_4$ bei [Ti79].

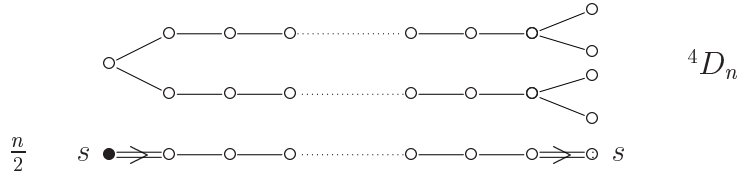
Falls k und $n - k$ ungerade sind, erhält man:



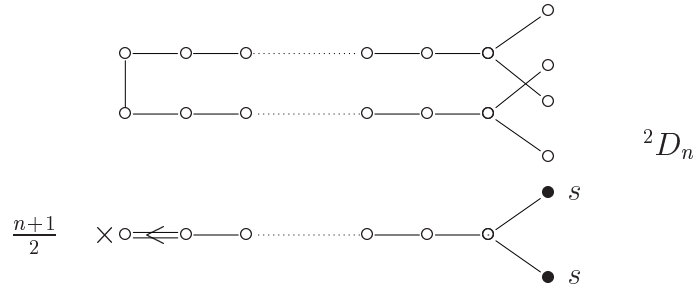
Fall 1.4: Sei $\beta^\vee = \beta_1^\vee$ und $\text{Fr} \in [\bar{n}] \subset W(D_n) \rtimes \sigma_2$. Dann hat man zwei Lösungen



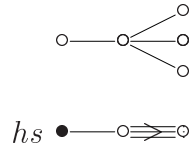
Fall 1.5: Sei n gerade, $\beta^\vee \in \{\beta_{n-1}^\vee, \beta_n^\vee\}$ und $\text{Fr} \in [\bar{n}] \subset W(D_n) \rtimes \sigma_2$. Dann ist die einzige Lösung: ⁷



Fall 1.6: Sei n ungerade, $\beta^\vee \in \{\beta_{n-1}^\vee, \beta_n^\vee\}$ und $\text{Fr} \in [\bar{n}] \subset W(D_n) \rtimes \sigma_2$. Dann hat man zwei Lösungen: ⁸



Fall 1.7: Hier darf $\text{Fr} \in W(D_4) \rtimes \sigma_3$ beliebig sein. Man hat für jede Wahl von β^\vee genau eine Lösung:



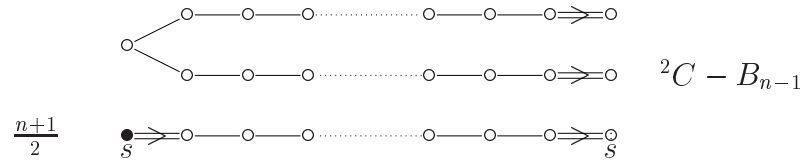
⁷Dieses Diagramm hat man für $n \geq 6$. Für $n = 4$ entartet es zu 4D_4 in [Ti79].

⁸Dieses Diagramm hat man für $n \geq 7$. Für $n = 5$ entartet es zum entsprechenden ${}^2D_5''$ in [Ti79].

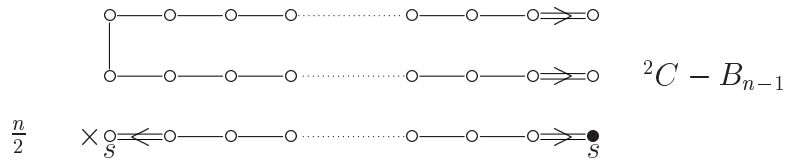
Fall 2: $\text{ord}(\Theta) = 2$.

Sei $\beta^\vee = \beta_n$ und $\text{Fr} \in W^\Theta \rtimes \langle \Theta \rangle$ so, daß Fr auf dem C_{n-1} -System $P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$ als Coxeterelement operiert.

Fall 2.1: n ist ungerade (d.h. $n - 1$ gerade). Die einzige Lösung ist: ⁹



Fall 2.2: n ist gerade ($n - 1$ ungerade). Die einzige Lösung ist: ¹⁰



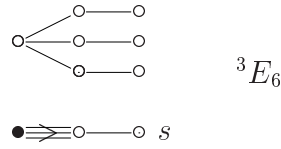
⁹Dieses Diagramm hat man für $n \geq 4$. Für $n = 2$ entartet es zu ${}^2C - B_2$ in [Ti79].

¹⁰Dieses Diagramm hat man für $n \geq 5$. Für $n = 3$ entartet es zu ${}^2C - B_3$ in [Ti79].

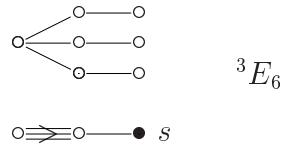
Φ ist vom Typ E_6 und $\beta^\vee \in \{\beta_1^\vee, \beta_6^\vee\}$.

Es bleibt nur $\Theta = id$ zu betrachten, da $P_I(\mathbb{Z}[\Phi]^*) = P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee])$.

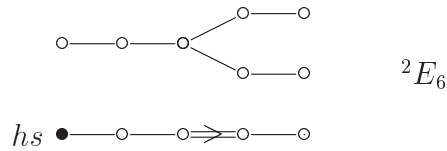
Fall 1: Sei $Fr = 9A = E_6(a_1) \subset W$. Dann hat man als einzige Lösung:



Fall 2: Sei $Fr \in \{12A, 6A\} = \{\text{cox}, \text{cox}^2\} \subset W$. Dann hat man als einzige Lösung:

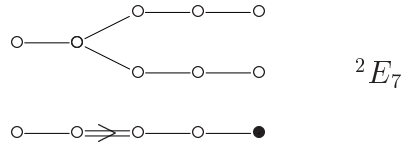


Fall 3: Sei $Fr \in \{-12A, -9A, -3A\} \subset -W = W \rtimes \sigma$, d.h. Fr ist beliebig aber primitiv in $W \rtimes \sigma$. Es gibt nur eine Lösung:

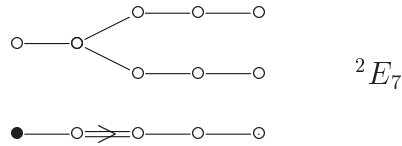


Φ ist vom Typ E_7 und $\beta^\vee = \beta_7^\vee$.

Falls $Fr \in \{E_7, E_7(a_2), E_7(a_4)\}$ hat man als einzige Lösung:



Falls $Fr \in \{E_7(a_1), E_7(a_3)\}$ hat man als einzige Lösung:



Literaturverzeichnis

- [Ar88] J. Arthur, *The invariant trace formula II. Global theory*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 501–554.
- [Bou] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chs. 4, 5, 6, Hermann (1968).
- [Bo79] A. Borel, *Automorphic L -functions*, Automorphic Forms, Representations and L -functions, Proc. Sympos. Pure Math. **33**, part 2 (1979), 27–61.
- [Boro98] M.V. Borovoi, *Abelian Galois cohomology of reductive groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **626** (1998).
- [BLR80] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, (1980).
- [BT72] F. Bruhat und J. Tits, *Groupes réductifs sur une corps local. I, Données radicielles valuées*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Scientifiques **41** (1972), 5–251.
- [BT84] F. Bruhat und J. Tits, *Groupes réductifs sur une corps local. II, Schémas en groupes. Existence d’une donnée radicielles valuée*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Scientifiques **60** (1984), 5–184.
- [BW72] N. Burgoyne und C. Williamson *Semisimple classes in Chevalley type groups*, Pacific J. Math. **70** (1972), 83–100.
- [Ca72] R.W. Carter *Conjugacy classes in the Weyl groups*, Comp. Math. **25** (1972), 1–59.
- [Ca85] R.W. Carter *Finite groups of Lie type*, Wiley Interscience, (1985).
- [Car79] P. Cartier, *Representations of p -adic groups*, Automorphic Forms, Representations and L -functions, Proc. Sympos. Pure Math. **33**, part 1 (1979), 111–155.
- [Clo87] L. Clozel, *Characters of non-connected, reductive p -adic groups*, Can. J. Math. **39** (1987), 149–167.
- [De81] D.I. Deriziotis, *Centralizers of semisimple elements in a Chevalley group*, Comm. in Alg., **9(19)** (1981), 1997–2014.
- [Dy57a] E.B. Dynkin, *Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras*, Amer. Math. Soc. Transl., (II. Ser.) Vol. **6** (1957), 111–244.
- [Dy57b] E.B. Dynkin, *The maximal subgroups of the classical groups*, Amer. Math. Soc. Transl., (II. Ser.) Vol. **6** (1957), 245–378.
- [Hal93] Th. Hales, *A simple definition of transfer factors for unramified groups*, Contemporary Mathematics, Vol. **145** (1993), 109–134.

- [Hal95] Th. Hales, *On the fundamental lemma for standard endoscopy: reduction to the unit element*, Can. J. Math., Vol. **47** (1995), 974–994.
- [Hasse] H. Hasse, *Zahlentheorie*, Akademie–Verlag Berlin, (1969).
- [HC70] Harish–Chandra (notes by G. van Dijk), *Harmonic analysis on reductive p -adic groups*, Springer Lecture Notes, Vol. 162 (1970).
- [Hij79] H. Hijikata, *On the stucture of semi–simple algebraic groups over valuations fields I*, Japan. J. Math. **1** (1979), 225–300.
- [K82] R. Kottwitz, *Rational conjugacy classes in reductive groups*, Duke Math. J. **49** (1982), 785–806.
- [K84] R. Kottwitz, *Stable trace formula: cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. **51** (1984), 611–650.
- [K86] R. Kottwitz, *Stable trace formula: elliptic singular terms*, Math. Ann. **275** (1986), 365–399.
- [K88] R. Kottwitz, *Tamagawa numbers*, Ann. of Math. **127** (1988), 629–646.
- [KS99] R. Kottwitz und D. Shelstad, *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque **255** (1999).
- [Lab84] J.P. Labesse, *Cohomologie, L -Groupes et fonctorialité*, Comp. Math. **55** (1984), 163–184.
- [Lab99] J.P. Labesse, *Cohomologie, stabilisation et changement de base*, Astérisque **257** (1999).
- [Lv96] E. Landvogt, *A compactification of the Bruhat–Tits–Building*, Springer Lecture Notes, Vol. 1619 (1996).
- [Lv00] E. Landvogt, *Some functorial properties of the Bruhat–Tits building*, J. reine angew. Math. **518** (2000), 213–241.
- [L79] R.P. Langlands, *Stable conjugacy: definitions and lemmas*, Can. J. Math. **31** (1979), 700–725.
- [L83] R.P. Langlands, *Les débuts d’une formule des traces stable*, Publ. Math. Univ. Paris VII **13** (1983).
- [LS87] R.P. Langlands und D. Shelstad, *On the definition of transfer factors*, Math. Ann. **278** (1987), 219–271.
- [LS90] R. P. Langlands und D. Shelstad, *Descent for transfer factors*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Birkhäuser, Boston (1990), 485–563.
- [Mil86] J.S. Milne, *Arithmetic duality theorems*, Academic Press (1986).
- [Mil92] J.S. Milne, *The points on a Shimura variety modulo a prime of good reduction*, The zeta functions of Picard modular surfaces, Les Publications CRM, Montréal (1992), 151–253.
- [PR94] V. Platonov und A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Academic Press (1994).

- [St68] R. Steinberg, *Endomorphisms of algebraic groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **80** (1968).
- [Sp79] T.A. Springer *Reductive groups*, Automorphic Forms, Representations and L -functions, Proc. Sympos. Pure Math. **33**, part 1 (1979), 3–27.
- [Sp81] T.A. Springer *Linear algebraic groups*, Progress in Mathematics, Birkhäuser (1981).
- [Ta79] J. Tate *Number theoretical background*, Automorphic Forms, Representations and L -functions, Proc. Sympos. Pure Math. **33**, part 2 (1979), 3–26.
- [Ti79] J. Tits, *Reductive groups over local fields*, Automorphic Forms, Representations and L -functions, Proc. Sympos. Pure Math. **33**, part 1 (1979), 29–69.
- [Wa79] W.C. Waterhouse, *Introduction to affine group schemes*, Springer (1979).
- [W] R. Weissauer, *Reductive descent for unramified maximal tori*, Preprint.
- [BFW] J. Ballmann, D. Fulea, R. Weissauer, *Abstieg anisotroper Konjugationsklassen in Weylgruppen*, Manuskripte der Forschergruppe Arithmetik Mannheim–Heidelberg, **17(1999)** (1999).

Index

$X^*(T) = \text{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$	2	$S_{I\alpha} = \sum_{\gamma \in I\alpha} \gamma$	7, 13, 19, 24, 25
$(B, T) : \text{Paar in } G$	3	Sf	125
$(\Phi^\vee)^I$	9, 13, 20	$\overline{T} : \text{Referenztorus für } \Delta_{\text{III}}$	95, 102
$A(w) \in H^1(W_F, \hat{S} \rightarrow \hat{U})$	98, 142	$T(F)_c : \text{max. komp. Gr. in } T(F)$..	57
$A = A(G, S, F) : \text{Apartment}$	57	$T_{\theta^*} = T/(1 - \theta^*)T$	84
$D_{G/M}(\delta)$	92, 132, 133	U, \hat{U}	95
$F^{unv} : \text{max. unv. Erw. in } \bar{F}/F$..	102, 141	U_α	57
F_\pm, F_+	54, 116	$U_x := \langle U_{\alpha, -\alpha(x)} \mid \alpha \in {}_F\Phi \rangle$	57
$G(F)_x$	1, 58, 119	$U_{I\alpha}$	13, 24
$G^{I\circ} = (G^I)^\circ$	18	$U_{\alpha, k}$	57
$H : \text{endoskopische Gr.}$	81, 87, 108	$V(\sigma)$	97, 142
$H_{I\alpha, k} : \text{Hyperebene in } V^I$ 9, 23, 26, 33		$V = X_*(T) \otimes \mathbb{R}$	2, 21, 57
$H_{\alpha, k} : \text{Hyperebene in } V$	2, 57	$V^* : \text{Dualraum zu } V$	2
$I(\chi)$	120	V_P	12, 23
$I\alpha : I\text{-Orbit von } \alpha$	7	$V_{der} = \mathbb{Z}[\Phi^\vee] \otimes \mathbb{R}$	2
$I \subset \text{Aut}(G, B, T)$	7, 13	$(P_I(\mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rtimes W^I)_{P_I(Y_\sigma)}$	14, 23, 40
$I^* : \text{gesternte Aktion von } I$	7	$W : \text{Weylgruppe}$	2
$I_\alpha = \text{Stab}_\alpha(I)$	7	W_0	13, 21, 24, 38
I_i	14, 22	W_1	13, 21–23, 38
I_{Φ_i}	14	W_2	13, 21, 22, 24, 38
$K = G(F)_x$	119	$W_{3/2}$	38
${}^L G : L\text{-Gruppe zu } G$	4	$W_{E/F} : \text{relative Weilgruppe}$	1
$L_z : \text{Linkstranslation}$	125, 127	$W_F : \text{Weilgruppe}$	1
$M : \text{Levigruppe}$	130	W_{aff}	57
$N = R_u(P)$	130	$X_*(T) = \text{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$	2
N_l	71	$X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha : \text{Wurzelvektor}$	10, 12
N_l^L	71	$\text{Cent}(B, G)$	1
$O_\delta^{L, \omega}(f) : \text{Orbitalintegral}$ 107, 127, 133		$\text{Cent}(G^g, \tilde{G}) : \text{Torus } (g \text{ regulär})$	42
$P_I(\alpha)^\vee$	9, 20	$\Delta(\gamma, \delta)$	106, 127, 140
$P_I = \frac{1}{ I } \sum_{\sigma \in I} \sigma$	7, 13, 25	$\Delta({}_F\Phi_{aff})$	57, 61
$P_{\theta^*} : T \rightarrow T_{\theta^*}$	84	$\Delta = \Delta(G, B, T) : \text{Basis von } \Phi$	2
$R_+ : \text{Vertreter für } \Gamma/\Gamma_\pm$	55, 116	$\Delta^* : \text{Dualbasis zu } \Delta$	9
S, \hat{S}	95	$\Delta^x(\gamma, \delta)$	112
$S \subset G \text{ maximaler } F\text{-Splittorus}$	57	$\Delta^U(\delta)$	140
		$\Delta_{\text{III}}(\gamma, \delta, \bar{\gamma}, \bar{\delta})$	97

- $\Delta_{\text{III}}^x(\gamma, \delta)$ 102, 106, 113, 142
 $\Delta_{\text{II}}(\gamma, \delta)$ 92, 106, 113, 141
 $\Delta_{\text{IV}}(\gamma, \delta)$ 92, 106, 113, 141
 $\Delta_{\text{I}}^x(\gamma, \delta)$ 92, 106, 141
 $\Delta_{\text{aff}}(\Phi, \theta)$ 28, 30
 $\Delta_{\text{ext}}(\Phi, \theta)$ 28, 33, 37
 $\Gamma_{\pm}, \Gamma_{+} \subset \text{Gal}(\bar{F}/F)$ 54, 116
 \mathcal{H} 81, 87, 108
 $\mathcal{H}(L, K)$: Heckealgebra 119
 $\mathcal{H}(\tilde{G}, K)$: Heckealgebra 119
 $\text{Norm}(H, G)$ 1
 Ω^C 24, 76
 $\Phi(G, T)$: Wurzelsystem 2
 $\Phi = \bigoplus_i \text{Ind}_{I_i}^I \Phi_i$ 14, 22, 28
 Φ^+ : Positivbereich von Φ 2
 $\Phi^{\vee}(G, T, I) \subset (\Phi^{\vee})^I$ 20
 $\Phi^{\vee} = \Phi^{\vee}(G, T)$: Cowurzelsystem ... 2
 Φ^{kurz} 2
 Φ^{lang} 2
 Φ_I 9, 13, 20
 Φ_i 14, 22
 $\Phi_{\text{res}} \simeq \Phi_I$ 19
 $\Pi(G, \theta, \mathbf{a}) \subset \Pi_{\text{unv}}(G(F))$ 122
 $\Pi(\Theta^*, \omega) \subset (\mathbb{T}_{sp})^{\wedge}$ 122
 $\Pi(\hat{G}, \hat{\theta}, a')$ 126
 $\Pi_{\text{unv}}(G(F))$: unverzw. Darst. von $G(F)$ 120
 $\Psi(G, T)$: Wurzeldatum 2, 4
 $\mathbb{T}_{sp} \subset \mathbb{T}$ max. F -Splittorus... 59, 119, 130
 $\Xi(G, F)$ 61
 $\mathbb{Z}[\Phi]^*$: Gewichtegitter 2, 9, 31
 $\mathbb{Z}[_F \Phi^{\vee}] \rtimes W$ 57
 α^+ : höchste Wurzel in Φ^+ 2
 $-\tilde{\alpha}$: höchste Wurzel in $(\Phi^I)^+$.. 25, 28
 β_{α}^{\vee} : Fundamentalgewichte 9
 χ_{α} : χ -Datum 54, 92, 140
 $\eta : T_H \xrightarrow{\sim} T_{\theta^*}$ 84, 91
 $\gamma(L)$ 69, 81, 83, 137
 $\overline{\gamma} \leftrightarrow \overline{\delta}$: Referenzmatching 95
 $\gamma \leftrightarrow \delta$: Matching 84, 112, 137
 $\gamma_H(L)$ 83, 137
 \tilde{G} : duale Gruppe zu G 4
 i^{\vee} 120
 $\kappa(E)$: Restklassenkörper 1
 $\kappa(G) = \text{Kern}[T_{sc} \times Z \twoheadrightarrow T]$ 13–15
 $\mathbf{a} \in H^1(W_F, \text{Cent}(\hat{G}))$ 81, 87, 126
 \mathbf{spl}_G : Splitting 3, 20, 82, 91
 \mathbf{tJZ}_p 50
 $\mathcal{B}(G, F)$: Gebäude 57
 \mathcal{G} : \mathcal{O}_F -Gruppenschema zu G 58
 $\mathfrak{A}(\tilde{\mathbb{T}}, G, F')$ 46
 $\mathfrak{D}(\tilde{\mathbb{T}}, G, F')$ 48
 $\mathfrak{D}_{\text{hyper}}(\tilde{\mathbb{T}}, G, F')$ 48
 $\mathfrak{E}(T, G, F')$ 49
 $\mathfrak{E}_{\text{halb}}(\tilde{T}, G, F')$ 49
 $\mathfrak{E}_{\text{schwach}}(\tilde{T}, G, F')$ 49, 77
 $\mathfrak{G}(\tilde{\mathbb{T}}, G, F')$ 47
 \mathfrak{g} : Liealgebra von G 16
 \mathfrak{g}_{α} : Wurzelraum 10, 12, 16
 $\mathfrak{g}_{I\alpha} \subset \mathfrak{g}^I$: Wurzelraum 17
 ν : Ordnungsabbildung 57
 $\omega = \omega(\mathbf{a}) \in \text{Hom}(G(F), \mathbb{C}^{\times})$. 107, 121
 \overline{F} : algebraischer Abschluß 1
 \overline{G} : Reduktion mod \mathfrak{p} 60
 $\varphi_{I\alpha}(\sigma)$ 16
 $\phi_{I\alpha}$ 18
 $\pi_0(G) = G/G^{\circ}$ 5, 21
 $\pi_0(G^I)$ 13, 21
 $\pi_1(G)$: Fundamentalgruppe 5, 37
 $\pi_s \in \Pi_{\text{unv}}(G(F))$ 120
 $\pi_{\chi} \in \Pi_{\text{unv}}(G(F))$ 120
 ρ_G : L -Aktion 4, 55, 107, 130
 $\text{Aut}(G)$ 3
 $\text{Aut}(G, \mathbf{spl}_G)$ 3
 $\text{Cor}_{E^{\times}}^{W_{E/F}}$ 52, 115
 $\text{Fix}_A(G)$ 1
 $\text{Inn}(G)$: innere Automorphismen ... 3
 $\text{Lie}(G)$: Liealgebra 16
 $\text{Out}(G) = \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$ 3
 $\text{Stab}_A(G)$ 1
 $\theta' \in L(F)$ res. h.e. 87, 119, 128
 $\theta \in L(F)$ 81, 87
 θ^* 4, 7, 24, 81, 87, 91
 \tilde{T} Torus bzgl. L 41
 \tilde{T}_{ξ} 101, 102

- $\tilde{\varphi}_{I\alpha}(\sigma)$ 17
- ξ 81, 82, 87, 98, 114, 126, 130
- $\xi_{T_H} : {}^L T_H \hookrightarrow {}^L G$ 97, 114
- $\xi_T : {}^L T_H \rightarrow {}^L G$ 98, 114
- a' : Kozykel in \mathbf{a} 82, 126
- $a_T(w) \in Z^1(W_F, \hat{T})$. 98, 114, 115, 117
- a_α : a -Datum 5, 91–93
- $b_{I\alpha}$ 37
- b_ξ 126, 127, 132
- $c(\alpha) \in \{1, 2\}$ 7, 9, 31
- $c_{I\alpha}$ 31
- f^\vee : Sataketransformierte 120, 125
- $f^{(P)}$: konstanter Fourierterm 131
- g 84, 91
- $i_{F'/F}$ 58
- $j : T(F) \rightarrow H^1(F, T_{sc} \rightarrow T)$ 97
- $m_\xi \in Z^1(W_F, \hat{G})$. 82, 87, 101, 114, 117
- $n(w)$: Steinbergrepräsentant 9
- p : Restklassencharakteristik von F . 1
- $q_\alpha = q^{[F_\alpha:F]}$ 139
- $r_E : E^\times \xrightarrow{\sim} W_E^{ab}$ 1, 52, 116
- $r_p(w) = \prod r_{p,\alpha}(w)$ 56, 115
- $r_{p,\alpha}(w) \in C^1(W_{E/F}, \hat{T})$ 55, 116
- rec : Langlandsreziproz. 52, 121
- $s \in \hat{H}$ 81, 82
- $s_\omega \in \hat{\mathbb{T}}_{sp}$ 121
- $s_{I\alpha}$: Spiegelung bzgl. $P_I(\alpha)$ 9
- $s_{q/p} \in C^1(W_{E/F}, \hat{T})$ 55, 115
- $t^* = \delta^* \theta^{*-1} \in T$ 84, 91
- val_F : Bewertung von \bar{F} 1
- $x(U)$ 79, 139
- $x_{sc}(w) \in Z^1(W_F, (\hat{T})_{sc})$ 98
- $z^*(\sigma) \in Z^1(F, \text{Cent}(G))$... 81, 83, 103
- $z_H^*(\sigma) \in Z^1(F, \text{Cent}(H))$ 83, 84, 91
- $z_{\text{spl}}(\sigma)$ 69, 88
- ${}^2A_{2n-1}$ 8, 15
- ${}^2A_{2n}$ 7, 8, 20, 26, 34, 67, 144
- 2D_n 8, 15
- 2E_6 8
- 3D_4 8
- 6D_4 8, 13, 16, 19
- ${}_F\Phi = \Phi(G, S)$ 57
- ${}_F\Phi_{aff}$ 57
- $|\cdot|_F$: Betrag auf \bar{F} 1
- a -Data 5, 91
- affine Wurzel 2, 57
- affines Dynkindiagramm 28, 30
- Alkoven 27, 31
- ecken 31
- anisotrop 41, 139
- Apartment 57, 58
- Assoziierte L -Aktion 107
- Bizentralisator 42
- Chevalley-Steinberg 3
- χ -Data 54, 91, 114, 117, 140
- Descentdatum 78
- Dynkin 33
- Dynkindiagramm
 - affines 28, 30
- Ecke 2
- Eichung 54, 115
- endoskopisches Datum ... 81, 108, 131
- erlaubter Torus 101, 102
- erweiterte Basis 28
- Exponentialsequenz 21
- Facette 2
- fast halbeinfach 42
- fundamentales Lemma .. 127, 128, 134
- Fundamentalgruppe 5
- Gebäude 57
- gesternte Aktion 4
- Gruppenschema 58, 78
- halbeinfach
 - fast 42
 - Operation von $\sigma \in \text{Aut}(G)$ 41
- halbstabil $G(F')$ -konjugiert 47, 49
- Harish-Chandra-Diskriminante ... 92, 132
- Hauptserie
 - unverzweigte 119
- Heckealgebra 119

- Hochschild–Serre–Spektralsequenz 13,
 16, 19, 60
 hyperspeziell . 59, 64, 72, 94, 107, 119,
 139
 Iwasawazerlegung 60
 Kammer 2, 27
 komplex 2, 26, 64
 wand 3
 Kottwitz–Shelstad–Paarung . . 96, 114,
 142
 L -Gruppe 4, 81, 131
 Langlands Reziprozitätsgesetz 52
 Langlandsdualität 52, 96, 121
 lokaler Index 57, 61
 Markierung des Gebäudes 61
 Matching 137
 maximal kompakte Untergruppe
 von $\tilde{T}(F)$ 75, 78
 maximaler Torus bzgl. L 42
 Norm–Image 83, 137
 $z_H^*(\sigma)$ – 84, 91, 137
 Ordnungshomomorphismus 57, 60
 Paar (B, T) 3, 41
 Quasisplittorus 42
 Reduktion mod \mathfrak{p} 60, 141
 regulär 42
 residuell halbeinfach 50
 Sataketransformation 120, 125
 schwach stabil $G(F')$ –konjugiert . . 46,
 49, 77
 Shapiro 15, 17, 60
 speziell
 Automorphismus 42, 61, 68
 Element von L 42
 Punkt 31, 60
 Wurzel 31
 Spiegelungshyperebene 2, 57
 Splitting 3, 20, 70, 82
 geliftet bzgl. $x \in \mathcal{B}$ 60, 94, 141
 stabil $G(F')$ –konjugiert 47, 49
 halb– 47, 49
 schwach 46, 49, 77
 stabil konjugiert 49
 maximale Tori 45
 stark reguläre Elemente . . 45, 107,
 127
 stark kompakt 50, 72, 112, 134
 stark regulär 42, 45, 83
 mod p 60, 102
 Steinberg
 allgemeiner Satz von 13
 zyklischer Fall 24, 143
 Steinbergrepräsentant . . 9, 12, 22, 43,
 55, 61, 93, 108, 117, 142
 Tate–Nakayama–Paarung . . 60, 92, 96
 topologisch unipotent 50
 topologische Jordanzerlegung 50
 Torus bezüglich L 41
 Transfer
 faktor 106, 127
 von Funktionen 126
 Typ einer Wurzel 7, 8
 unverzweigt 4
 Charakter 4, 53, 117
 Darstellung 4
 Gruppe 4, 108
 Hauptserie 119
 Körpererweiterung 5
 Kohomologie 4
 Weilgruppe 1
 Weylgruppe
 affin 2
 sphärisch 2
 Wurzeldatum 2, 4, 13, 19
 Wurzelsystem
 affin 2, 27
 reduziert 2, 7

sphärisch	2
Wurzeltyp	7, 8
Wurzelvektor	10, 12
$z_H^*(\sigma)$ -Norm-Image	84, 91, 137
z -Extension	5, 121
zahm verzweigt	114
zulässige Einbettung	83, 84, 91